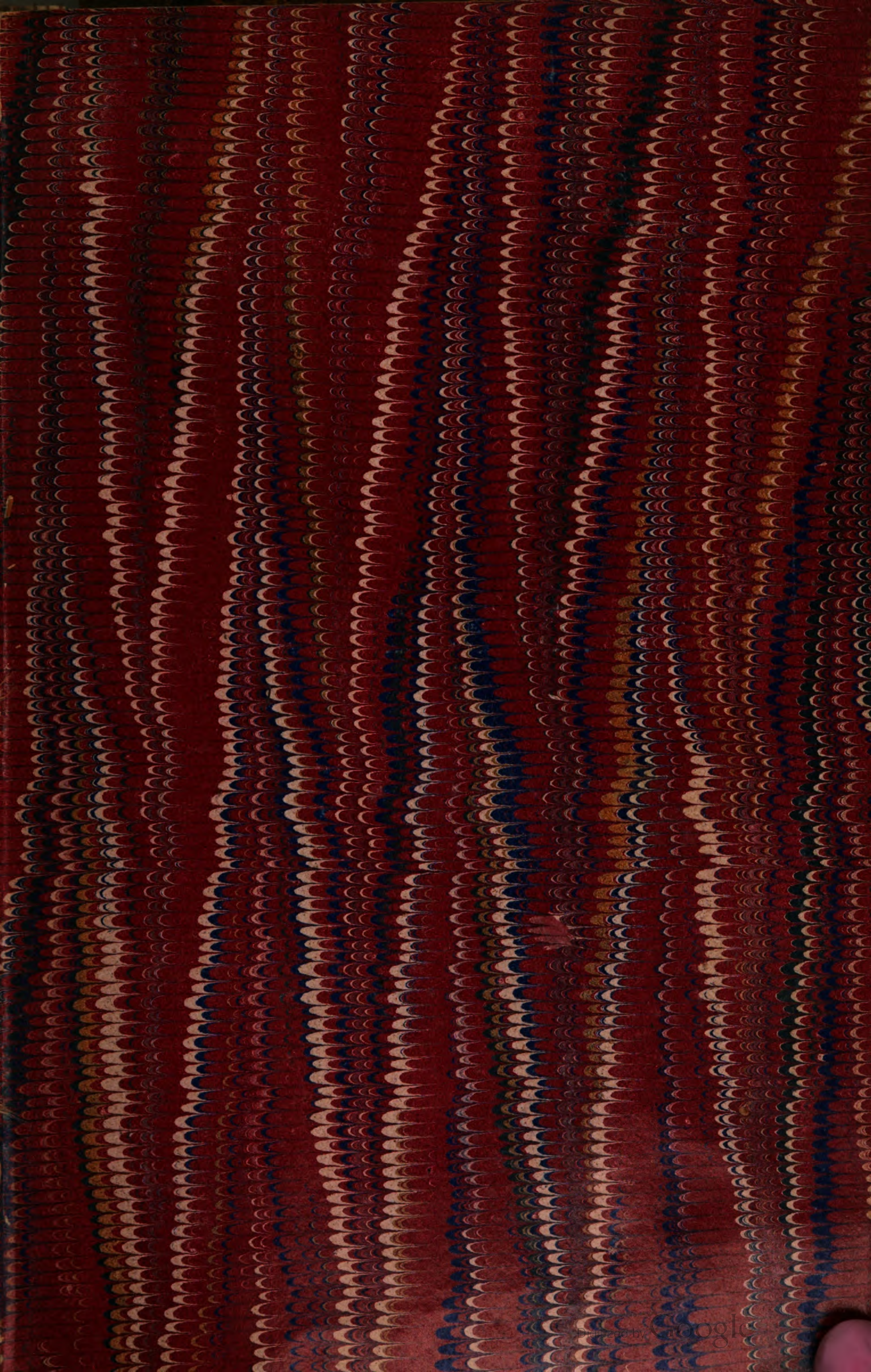




COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.



PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE,

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

PAR M. BRESSE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur de Mécanique à l'École des Ponts et Chaussées,
Examinateur des Élèves de l'École impériale Polytechnique,
Membre de la Société Philomathique de Paris.

TROISIÈME PARTIE.

CALCUL DES MOMENTS DE FLEXION DANS UNE POUTRE A PLUSIEURS TRAVÉES SOLIDAIRES.

AVEC ATLAS COMPOSÉ DE 24 PLANCHES IN-FOLIO.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1865

AVANT-PROPOS.

Depuis quelques années, on a fréquemment employé, dans la construction des ponts destinés aux voies de fer, les poutres droites en tôle, continues d'une culée à l'autre, c'est-à-dire dont les travées ne sont pas indépendantes, et forment au contraire une pièce unique soutenue par des appuis fixes, en ses deux points extrêmes et en un certain nombre de points intermédiaires. C'est le système des ponts d'Asnières sur la Seine, de Langon et de Bordeaux sur la Garonne, de la Quarantaine sur la Saône à Lyon, de Kehl sur le Rhin, etc., etc.: nous pourrions multiplier les exemples. Par quelles considérations peut-on en justifier l'emploi? C'est ce que nous nous dispenserons d'examiner ici, car toutes les raisons alléguées pour ou contre sont loin d'appartenir exclusivement à la Résistance des Matériaux; sans vouloir émettre à cet égard aucune opinion extrême, nous nous bornerons à dire que si les ponts en maçonnerie doivent être généralement préférés, en raison de leur durée indéfinie, quand ils ne sont pas beaucoup plus coûteux et que les circonstances locales en permettent l'emploi, il est des cas particuliers où les grandes travées métalliques fournissent à peu près la seule solution admissible : par exemple, quand il y a des difficultés de fondation exceptionnelles, qu'il faut espacer beaucoup les points d'appui,

qu'on dispose d'une faible hauteur entre le plan des grandes eaux d'une rivière et le niveau de la voie qui la traverse, etc. En pareil cas, les poutres droites en tôle sont pour l'ingénieur une précieuse ressource.

Les calculs de stabilité de ces poutres, quand elles sont à plusieurs travées solidaires, se font par une méthode qu'on est, au premier abord, tenté de croire excessivement hardie dans son point de départ, pour ne pas dire entièrement inexacte. D'abord on admet les hypothèses fondamentales de la Résistance des Matériaux, c'est-à-dire l'existence de sections planes et normales, qui restent planes et normales après la déformation, ce qui suffit déjà pour éveiller l'incrédulité des personnes habituées aux considérations plus rigoureuses sur lesquelles se fonde la théorie mathématique de l'élasticité; en outre, on détermine les moments de flexion et efforts tranchants comme si la pièce avait une section constante, tandis que, en fait, la section varie et se trouve renforcée dans les parties où le calcul a signalé des moments de flexion plus considérables. C'est en quelque sorte le point de départ d'une règle de fausse position, pour arriver à construire un solide d'égale résistance. Voici comment on devrait en concevoir la marche : commençant par supposer constante la section inconnue, on déterminerait les forces exercées sur chaque section, d'où l'on déduirait les dimensions de celles-ci; mais ces dimensions ne restant pas partout les mêmes, comme on l'avait primitivement admis, il faudrait recommencer le calcul des tensions avec les dimensions variables fournies par le premier essai, et en conclure d'autres dimensions probablement un peu différentes des premières; puis, avec ces dimensions nouvelles, on ferait un troisième essai, et ainsi de suite, en procédant par approximations successives, jusqu'à ce que deux essais consécutifs

eussent conduit à des résultats sensiblement identiques. Toutefois, on s'en est tenu jusqu'à présent au premier essai, et l'on ne modifie plus les dimensions variables qu'il a fournies : c'est là, nous le répétons, une très-grande hardiesse au point de vue théorique. A ces objections et à quelques autres d'un ordre secondaire, sur lesquelles il serait inutile de s'appesantir, la pratique (toujours disposée à se contenter d'à peu près et s'inquiétant peu des vérités rigoureuses) ne fait qu'une réponse : les poutres ainsi calculées se comportent convenablement et résistent bien aux épreuves qu'on leur impose, le fait est maintenant constaté par de nombreuses expériences; donc la méthode de calcul n'est pas mauvaise (*).

Malgré ce raisonnement, il n'est pas douteux que si l'on pouvait réussir à modifier les bases de la méthode de manière à la rendre plus rigoureuse, sans que son usage devînt pour cela beaucoup plus long et plus difficile, les constructeurs accepteraient sans peine un tel changement, qui réaliserait un véritable progrès scientifique. Ce progrès, nous n'en sommes point en possession et nous ne venons pas l'apporter ici : notre but est moins relevé, et la tâche que nous avons essayé de remplir, plus modeste. Nous nous plaçons au point de vue d'un Ingénieur qui veut, en se fondant sur les principes ap-

(*) Nous passons ici sous silence quelques méthodes sommaires qu'on a parfois employées, et qui consistent à considérer les appuis intermédiaires comme assimilables à des encastrements complets ou à des demi-encastrements, par l'effet de la solidarité des travées. Ces procédés un peu trop empiriques, tout au plus acceptables dans un avant-projet, sont aujourd'hui condamnés par la jurisprudence du Conseil général des Ponts et Chaussées, à cause des erreurs considérables qu'ils peuvent entraîner dans certains cas. Nous pensons d'ailleurs qu'avec les résultats numériques donnés à la fin de cet ouvrage, ils ne sont plus les seuls qui présentent l'avantage de conduire promptement au but.



pliqués avant lui, calculer les dimensions transversales d'une poutre à plusieurs travées, et qui pour cela doit rechercher les moments fléchissants dans les diverses sections; nous lui offrons pour y arriver une route nouvelle plus facile et plus sûre, toujours bonne quels que soient le nombre des travées et l'espacement relatif des appuis; en outre, pour le cas d'une poutre symétrique ayant ses travées toutes égales (à part les deux extrêmes), ce qui est le cas ordinaire, nous établissons des formules spéciales, mais toujours démontrées sans fixer le nombre des travées, ni le rapport entre la longueur d'une travée de rive et celle d'une travée intermédiaire; enfin, nous donnons une grande quantité de calculs numériques tout faits, qui renferment la solution complète du problème pour les poutres de trois à douze travées, avec huit valeurs différentes du rapport dont on vient de parler (*).

Notre travail se divise en deux Chapitres, suivis d'un recueil de tableaux numériques, et de formules propres à une application pratique immédiate; le premier Chapitre est consacré aux poutres dont les travées ont des longueurs quelconques, le second aux poutres dont les travées ont des longueurs

(*) Suivant une délibération du Conseil général des Ponts et Chaussées, une Commission a été nommée pour rédiger les formules applicables au calcul des ponts en métal. En qualité de rapporteur de la Commission, nous nous sommes personnellement livré à des recherches détaillées sur la question des poutres continues, à plusieurs appuis : nous avons été ainsi conduit à agrandir beaucoup et à compléter, sur quelques points importants, la théorie que nous en avions donnée dans la première Partie de notre Cours (§ II du Chapitre troisième), publiée en 1859. Cette troisième Partie est donc, à véritablement parler, le complément de la première, dont elle forme en quelque sorte un chapitre; le numéro d'ordre ne tient pas ici à une classification méthodique et rationnelle, mais simplement à la date d'une publication longtemps retardée, d'ailleurs, par des circonstances indépendantes de notre volonté.

égales, sauf les travées de rive. Nous allons les analyser succinctement.

Lorsqu'on donne une poutre soumise à des charges connues et qu'on demande la valeur du moment de flexion dans une section quelconque, la première difficulté qu'on rencontre consiste en ce que les réactions des appuis ne sont point immédiatement connues, et que la statique des corps solides ne suffit pas pour les déterminer. L'idée qui a dû se présenter tout naturellement en cette circonstance, celle qu'ont en effet suivie Navier et d'autres auteurs, c'est de rechercher par un calcul préalable les intensités de ces réactions, après quoi toutes les forces extérieures appliquées à la poutre sont connues, et le calcul des moments de flexion devient tout à fait immédiat. Mais cette idée, la plus naturelle sans aucun doute, n'est pas la plus simple dans l'application. En effet, quand on a posé l'équation différentielle de la fibre moyenne déformée, en fonction des forces tant connues qu'inconnues, et qu'après avoir intégré cette équation l'on exprime que la fibre moyenne passe par tous les points d'appui, on trouve ainsi une série de conditions dans lesquelles entrent les réactions inconnues, et qui peuvent bien les déterminer, conjointement avec les équations générales de l'équilibre. Seulement, comme toutes les inconnues entrent dans chaque équation, le calcul ainsi conduit devient très-pénible pour peu qu'il y ait cinq ou six appuis, et nous ne savons pas s'il serait possible de le mener à bonne fin en laissant à la question toute sa généralité, comme nous l'avons fait.

Feu M. Clapeyron, Ingénieur en chef des Mines, membre de l'Académie des Sciences, a le premier introduit l'innovation très-heureuse de prendre pour inconnues auxiliaires les moments de flexion sur les points d'appui, et dans cette idée

se trouve la source de tous les perfectionnements obtenus. M. Clapeyron avait d'abord considéré, en même temps que les moments de flexion sur les piles, les efforts tranchants et inclinaisons de la fibre moyenne aux mêmes points : dans un Mémoire présenté, en 1857, à l'Académie des Sciences, il s'était débarrassé de ces autres quantités auxiliaires, pour ne conserver que les moments, ce qui paraît préférable. Mais il est juste de dire ici que cette idée a été publiée la première fois par M. Bertot, Ingénieur civil, qui peut en conséquence revendiquer la découverte, tout en reconnaissant, nous n'en doutons pas, que les travaux antérieurs de M. Clapeyron la lui avaient singulièrement facilitée (*).

Le grand avantage qu'il y a d'employer comme inconnues auxiliaires les moments de flexion sur les piles au lieu des réactions, c'est qu'il est possible d'établir entre ces inconnues une série d'équations du premier degré, fort simples, en nombre suffisant pour les déterminer, et dans chacune desquelles n'entrent que trois des inconnues. Cette série d'équations résulte de l'emploi d'une seule et même relation pour tous les groupes de deux travées consécutives ; la forme que MM. Bertot et Clapeyron lui ont donnée suppose essentiellement la répartition uniforme de la charge sur chacune des travées, et la situation de tous les points d'appui sur une ligne capable de coïncider avec la fibre moyenne de la poutre, quand celle-ci se trouve dans son *état primitif* et n'a pas encore subi les effets des forces extérieures. Quoique ces hypothèses particulières comprennent à peu près toutes les applications usuelles, il nous a semblé intéressant, au point de vue de la théorie et aussi pour certains détails qui ne sont pas à dédaigner dans la

(*) Voir les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1860, 2e semestre, p. 405.

pratique, de généraliser la relation dont il s'agit. Tel est le but principal d'un paragraphe placé au commencement de ce volume. La relation généralisée contient les moments de flexion inconnus exactement de la même manière que celle de MM. Bertot et Clapeyron : mais les termes relatifs aux charges sont remplacés par des intégrales immédiatement calculables quand les charges sont définies; de plus, il s'y introduit des termes nouveaux contenant les abaissements de la poutre au-dessus de trois points d'appui consécutifs. La démonstration, très-rapide, que nous en avons donnée, repose sur une expression particulière du moment de flexion relatif à chaque point d'une travée, qui n'avait pas été remarquée précédemment : nous établissons que ce moment se compose de deux parties, l'une répondant à l'hypothèse de sa variation uniforme entre les deux appuis qui terminent la travée, l'autre égale à la valeur qu'il prendrait si la travée en question était sciée sur ses deux appuis et indépendante du reste de la pièce, tout en conservant ses charges propres. Chacune de ces deux parties se calcule sans aucune difficulté, quand on connaît les deux moments extrêmes de la travée et les poids qu'elle supporte, quelles que soient les charges des autres travées : aussi l'expression dont nous parlons est-elle utile, non-seulement pour la démonstration du théorème généralisé, mais encore pour donner de suite le moment de flexion d'un point quelconque, lorsqu'on a déjà ceux des sections faites au-dessus des appuis. Nous ne mentionnerons pas quelques autres propriétés assez curieuses, mais moins importantes, établies en passant, dans la suite du § Ier, Chapitre premier.

Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la recherche des moments de flexion produits, soit par une charge concentrée unique, soit par la charge uniforme d'une seule travée,

cas élémentaires qui comprennent implicitement tous les cas possibles, car les effets produits par des poids quelconques se superposent, et l'on connaît l'effet total de l'ensemble, par cela même qu'on a l'effet de chaque poids pris isolément. Le problème se résout sans difficulté quand on a préalablement calculé diverses séries de nombres qui s'obtiennent de suite, en fonction des rapports entre les ouvertures des travées, et qui ne dépendent nullement des charges. Nous avons eu soin, dans chaque cas, de discuter les formules et de montrer les changements de signe ou de grandeur qu'éprouvent les moments lorsque la charge varie de position; enfin nous avons comparé les moments maxima qui ont lieu dans l'hypothèse de la charge concentrée et dans celle de la charge répartie uniformément, en conservant son intensité totale, sur la même travée.

Dans le § IV du Chapitre premier, nous abordons la recherche des courbes enveloppes des moments, telle qu'elle se présente en pratique. Les poutres doivent supporter, outre la charge permanente uniformément répartie sur leur longueur entière, une surcharge dont le poids par mètre courant est défini, mais qui peut s'étendre sur un nombre arbitraire de travées contiguës ou non. Il en résulte que le moment fléchissant d'une section quelconque se compose d'une partie constante représentant l'effet de la charge permanente, et d'une partie variable suivant la combinaison de surcharge que l'on imagine : il faut donc nécessairement se demander quelles combinaisons donneront lieu aux valeurs extrêmes de ce moment, et enfin quelle sera la limite supérieure de ses valeurs absolues. Pour une poutre de n travées, le nombre des combinaisons possibles est 2^n, en y comprenant la surcharge nulle et la surcharge complète; c'est donc un nombre qui ne tarde

pas à devenir extrêmement grand, de sorte qu'on tomberait dans des calculs très-longs s'il fallait discuter en particulier toutes ces surcharges, pour choisir en chaque point celle dont l'effet est le plus grand. M. Lévy (Maurice), Ingénieur des Ponts et Chaussées, a indiqué, dans un concours de Mécanique appliquée fait pendant son séjour à l'École, un moyen très-élégant pour éviter une telle discussion : c'est de construire les lignes représentatives des moments, dans l'hypothèse où chaque travée serait successivement surchargée seule, la charge permanente étant de plus supprimée; puis d'ajouter, en chaque point de la fibre moyenne, d'une part toutes les ordonnées positives, d'autre part toutes les ordonnées négatives : les deux sommes ne sont autre chose que les deux moments limites produits par toutes les combinaisons de surcharge. Cette idée est des plus ingénieuses; elle se présente comme une conséquence si naturelle et si évidente du principe de la superposition des effets des forces (*), qu'on est presque étonné de ne pas l'avoir rencontrée plus tôt; mais c'est un sentiment qu'on éprouve à propos de toutes les choses, parfois d'une véritable importance, qui comptent la simplicité au nombre de leurs mérites. Toujours est-il que M. Lévy n'a pas tiré de sa méthode les conséquences qu'elle renfermait en germe, et auxquelles nous sommes arrivé en employant son procédé comme moyen de recherche et de démonstration. En voici la substance :

Toute travée (à part celles de rive) peut se diviser en cinq intervalles dont les longueurs ne dépendent que de la distribution des appuis; dans chacun de ces intervalles, on peut indiquer d'avance les travées qu'il faut surcharger pour obtenir,

---

(*) *Voir* notre *Cours de Mécanique appliquée*, t. Ier, p. 111 et suiv.

soit la limite positive, soit la limite négative des moments produits par la surcharge seule, la charge permanente étant supposée nulle (*). Ces surcharges sont toujours définies de la même manière, quels que soient le nombre des travées et leur espacement relatif. Dans les travées de rive, il y a quelque chose d'analogue, seulement les intervalles se réduisent à deux.

Quand on connaît les moments limites dus à la surcharge seule, il est aisé de leur ajouter ceux qui sont dus à l'action isolée de la charge permanente, et l'on a deux limites correspondantes, pour le cas mixte. Parmi ces deux limites on peut enfin choisir la plus grande des deux en valeur absolue, ordinairement la seule utile à connaître. A cette occasion nous démontrons deux théorèmes : 1° la somme algébrique des deux premières limites (quand la surcharge agit seule) est égale au moment produit par la charge permanente, abstraction faite du facteur qui exprime le poids par mètre courant; 2° la plus grande limite en valeur absolue, dans le cas mixte, s'obtient en ajoutant arithmétiquement le moment dû à la charge permanente, avec celle des deux premières limites ayant même signe que lui.

Nous avons dit tout à l'heure que dans une travée intermédiaire il y avait cinq régions à distinguer; par conséquent, chacune des deux premières limites est successivement représentée par cinq fonctions différentes de l'abscisse, ce qui semble donner dix fonctions à trouver, et même onze en y comprenant celle qui exprime l'effet de la charge permanente.

(*) M. Piarron de Mondésir a publié, sur les poutres à plusieurs travées, un ouvrage où il donne quelques propositions tendant au même but. Mais il y arrive moins complétement, et d'ailleurs par d'autres moyens.



Mais on a sept relations très-simples entre ces fonctions, dont cinq résultent du premier théorème ci-dessus, et deux autres sont des relations d'identité : il ne reste donc, en définitive, que quatre fonctions inconnues. Ce nombre se réduit à trois pour les travées de rive. Un exemple numérique par lequel se termine le premier Chapitre, et dans lequel on a supposé le cas de cinq travées inégales, montre l'ordre à suivre dans le calcul de ces diverses fonctions.

Le Chapitre suivant a pour objet les poutres dont les appuis, au lieu d'être disposés d'après une loi arbitraire, seraient à égale distance les uns des autres, à part les deux extrêmes : la première et la dernière travée reçoivent des longueurs b égales entre elles, mais différentes de la longueur c des travées intermédiaires. C'est le seul cas usuel. Il donne lieu à des simplifications particulières et à des recherches de détail qui ne sont point sans intérêt, comme on pourra le voir par l'aperçu ci-après.

En premier lieu, les séries numériques étudiées au Chapitre premier peuvent se mettre sous forme algébrique, chaque terme étant exprimé en fonction de son indice et du rapport $\frac{c}{b}$, et cela sans spécifier le nombre des travées, qui reste sous forme littérale. Le fait ainsi énoncé semblera peut-être étrange : car les séries en question se déterminent par des équations du premier degré, en nombre égal à celui des travées; on se trouve donc en présence d'un système d'équations dont le nombre n'est pas fixé, c'est-à-dire qu'on a n équations, n étant arbitraire. Et cependant on en déduit la valeur des inconnues, parce que toutes ces équations (sauf les deux extrêmes) ont une même forme, ce qui permet de ramener leur solution à l'intégration d'une équation linéaire du second

ordre aux différences finies. Si l'on pose

$$\alpha' = -2 - \sqrt{3}, \quad \alpha'' = -2 + \sqrt{3},$$

on trouve que tous les nombres dont on a besoin s'expriment au moyen des puissances de α' et α''. L'étude de ces puissances nous a conduit à celle de trois autres séries, calculables une fois pour toutes (car elles ne dépendent en rien de la poutre), et dont l'emploi nous a été d'un grand secours.

Arrivé à ce point, nous aurions pu poursuivre la recherche des courbes enveloppes des moments, qui est toujours notre but final, par l'application pure et simple de la méthode exposée dans le § IV du Chapitre premier. Chaque ordonnée de ces courbes est, comme nous l'avons montré, la somme d'un certain nombre d'ordonnées partielles, dont chacune répond à la surcharge d'une seule travée; l'ensemble des travées à surcharger est parfaitement connu, suivant la situation de l'ordonnée que l'on cherche; en outre, les ordonnées partielles dont il faut effectuer la superposition s'expriment en fonction des séries numériques ci-dessus rappelées. Donc, puisque, dans le cas actuel, ces séries sont elles-mêmes exprimées algébriquement, toute ordonnée des courbes enveloppes aurait pu s'obtenir par une sommation de termes connus isolément. En suivant cette marche, on n'aurait même généralement rencontré que des sommations de progressions géométriques ayant pour raison α' ou α'' : toutefois, après quelques essais, nous l'avons jugée peu propre à nous donner simplement les résultats cherchés, et nous lui en avons préféré une autre plus directe.

Au lieu de déterminer l'effet partiel d'une surcharge placée sur une seule travée, à laquelle on attribue successivement

toutes les positions possibles, nous avons déterminé de suite les effets totaux, en considérant :

1°. La charge permanente (ou la surcharge) sur toutes les travées;

2° La surcharge sur toutes les travées paires, ou sur toutes les travées impaires;

3° La surcharge sur deux travées contiguës, et sur toutes les autres, prises de deux en deux à partir de celles-là.

Dans ces diverses hypothèses, nous avons toujours pu trouver les moments de flexion sur les points d'appui (ce qui les fait connaître ensuite dans une section quelconque), par l'intégration d'équations linéaires du second ordre aux différences finies, comme lorsqu'il s'agissait des séries numériques : le procédé employé dans cette première occasion ne doit subir que des modifications fort légères. Les formules auxquelles nous avons été ainsi conduit sont généralement simples et d'une application facile; elles expriment toutes une certaine quantité en fonction du nombre n des travées, du rang m de la travée particulière dont on s'occupe, et du rapport $\frac{c}{b} = \delta$ entre les longueurs des travées intermédiaires et de rive. Le plus souvent ce dernier entre sous forme explicite, pendant que m et n figurent comme indices de nombres à prendre dans certaines séries calculées une fois pour toutes. Le principal reproche qu'on puisse faire à nos formules, c'est d'être un peu nombreuses, et d'exiger la classification de beaucoup de cas particuliers : mais on nous pardonnera sans doute, si l'on songe que nous avons résolu le problème, très-général, d'étudier les moments de flexion limites, *dans la $m^{ième}$ travée d'une poutre à $n+1$ appuis, le rapport δ n'ayant, ainsi que m et n, aucune valeur numérique particulière.*

Nous avons ensuite montré comment, avec les éléments ci-dessus déterminés, on arrive à construire les courbes enveloppes des moments.

Enfin nous avons fait l'application numérique de nos formules aux poutres de trois à douze travées, avec huit valeurs du rapport δ, ce qui donne un total de quatre-vingts poutres et de trois cent vingt travées, dans des conditions différentes. Pour chacune d'elles nous fournissons, soit par des tableaux de nombres, soit par une suite de dessins réunis en Atlas (*), tout ce qui est nécessaire pour obtenir très-facilement et promptement les courbes enveloppes demandées.

Nous avons même dressé un Formulaire donnant les équations d'une partie de ces courbes; les autres se déduisent de celles-là, par de simples soustractions. Notre Formulaire sera, nous l'espérons, de quelque utilité dans la pratique, car nous y avons poussé aussi loin que possible les réductions en nombres, et nous n'avons conservé sous forme littérale que les poids par mètre courant, l'ouverture d'une travée de rive, et l'abscisse nécessaire pour définir la section dont on s'occupe. Il ne renferme pas moins de 1200 formules : cette masse considérable de résultats, que nous avons pu calculer dans un assez court espace de temps, est, pensons-nous, la meilleure preuve que notre solution présente, à un degré suffisant, la simplicité qu'il est naturel de désirer en pareille matière.

Nous mentionnerons encore ici diverses questions traitées dans le § VI et dernier du second Chapitre. On y trouvera la théorie de la poutre à deux travées égales; l'appréciation, sur un exemple, de l'influence trop peu connue des écarts qui

(*) L'Atlas est composé de vingt-quatre planches; on n'y a fait figurer que les poutres de trois à sept travées inclusivement.



peuvent exister entre la ligne des appuis et la fibre moyenne *dans son état naturel;* la recherche de la disposition des appuis, tant comme écartement que comme nivellement, d'où résulterait le minimum du moment fléchissant moyen, sous l'action d'une charge uniforme, etc.

On remarquera peut-être que cet ouvrage traite d'une manière assez sommaire la question des *efforts tranchants.* Nous avons eu, pour agir ainsi, un double motif : d'abord la connaissance des moments de flexion entraîne, si l'on y tient, celle des efforts tranchants, car il n'y a qu'une dérivée à prendre pour passer des premiers aux seconds; d'un autre côté, si l'on détermine la section de l'âme d'une poutre en double T d'après l'effort tranchant, on la trouve presque toujours insuffisante pour résister au *flambage,* et on l'augmente dans une mesure arbitraire. Ce n'est donc pas la peine de s'occuper longuement d'une quantité dont on fait si peu d'usage en fin de compte. On aurait d'ailleurs approximativement sa valeur maximum dans une travée, pour les cas ordinaires, en augmentant un peu le demi-poids de la travée (en prenant, par exemple, les $\frac{5}{8}$ du poids total), surcharge comprise.

Cependant, comme il se peut, malgré ces observations, qu'on ait quelquefois besoin de déterminer exactement, pour une section quelconque de la poutre, les efforts tranchants limites qui s'y produisent, sous l'action combinée de la charge permanente et des surcharges, nous donnons le moyen général d'effectuer cette détermination, dans une note insérée à la fin du Chapitre premier.

En résumé, le problème de la détermination des moments fléchissants dans une poutre à plusieurs travées solidaires présente, au point de vue purement analytique, un intérêt très-réel, parce que, suivant la manière dont on s'y prend, on

peut être conduit, soit à des calculs algébriques impraticables, soit, au contraire, à des calculs relativement simples et élégants. Ce livre est fort loin sans doute d'en renfermer la meilleure solution : nous espérons toutefois qu'il est de nature à mettre sur la voie de perfectionnements ultérieurs.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVANT-PROPOS V

TROISIÈME PARTIE.

CALCUL DES MOMENTS DE FLEXION DANS UNE POUTRE A PLUSIEURS TRAVÉES SOLIDAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

DES POUTRES A PLUSIEURS TRAVÉES, EN GÉNÉRAL.

§ I. — *Théorème relatif aux moments de flexion sur trois points d'appui consécutifs d'une poutre; remarques diverses* 1

1. Expression particulière du moment de flexion en un point quelconque d'une travée 1
2. Théorème sur les moments de flexion en trois points d'appui consécutifs 6
3. Remarque au sujet des encastrements 9
4. Application du théorème principal au cas où chaque travée supporte une charge concentrée unique 11
5. Cas de charges quelconques 13
6. Cas de poids uniformément répartis sur la longueur entière des travées 15
7. Recherche des réactions des appuis 17
8. Relation entre les inclinaisons de la fibre moyenne au-dessus de trois points d'appui consécutifs, supposés de niveau 19

§ II. — *Détermination des moments fléchissants produits par une charge concentrée unique, lorsque tous les points de la fibre moyenne primitive situés au-dessus des appuis ont une fixité absolue* 22

9. Formation et étude préliminaire de quelques séries numériques. 22
Exemple particulier 31

Pages.
10. Recherche des moments fléchissants sur les points d'appui, dans le cas où la poutre supporte une charge concentrée unique... 33
11. Moment fléchissant au point d'application même de la charge.. 40
12. Signes des moments X_{m-1}, X_m, X'.......................... 41
13. Représentation graphique des moments produits par une charge isolée.. 42
14. Observation sur le signe du moment fléchissant aux divers points de la travée qui porte la charge.......................... 45
15. Cas particulier d'une travée extrême..................... 50
16. Des plus grands moments de flexion que puisse produire une charge concentrée.................................... 52
17. Résumé du § II.. 62

§ III. — *Des moments de flexion produits par la charge uniforme d'une seule travée*.. 65

18. Moments au-dessus des points d'appui.................... 65
19. Du moment de flexion en un point quelconque, dans une travée non chargée... 68
20. Du moment de flexion en un point quelconque de la travée chargée... 70
21. Moments de flexion maxima produits par la charge uniforme d'une travée unique.. 75
22. Comparaison des moments de flexion maxima, dans les deux cas d'une charge uniformément répartie sur une travée, ou concentrée en un seul point de la même travée............. 78

§ IV. — *Courbes enveloppes des moments*........................ 81

23. Définition de la charge permanente et de la surcharge d'une poutre... 81
24. Définition des courbes enveloppes; relation entre les deux limites du moment fléchissant produit par la surcharge en un point déterminé.. 84
25. Moments fléchissants produits, dans une travée déterminée, par la surcharge d'une travée unique, de rang quelconque....... 89
26. Recherche générale des courbes enveloppes des moments dans une travée déterminée, sous l'action de la surcharge seule.... 92
27. Même problème pour une travée de rive..................... 100
28. Observations au sujet des théorèmes précédents............. 101
29. Exemple numérique de la détermination des courbes enveloppes. 103

NOTE SUR LA RECHERCHE DES EFFORTS TRANCHANTS LIMITES....... 123



CHAPITRE DEUXIÈME.

DES POUTRES SYMÉTRIQUES, AYANT LEURS TRAVÉES INTERMÉDIAIRES ÉGALES.

	Pages.
§ I. — *Préliminaires*	127
30. Définition de la poutre	127
31. Des séries u, v, β, γ	128
32. Puissances des nombres α', α''; séries M et N	131
33. Autres formes données aux séries u et β; série h	138
34. Tableaux numériques relatifs aux séries u et β	146
§ II. — *Effet spécial de la charge permanente*	148
35. Moments de flexion sur les points d'appui	148
36. Remarques diverses sur les formules (7) et (8)	154
37. Moment de flexion produit par la charge permanente, en un point quelconque d'une travée	159
38. Cas particuliers d'une travée extrême et d'une travée centrale.	167
39. Cas particulier d'un nombre infini de travées	170
40. Cas particulier $\delta = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}2247...$	172
41. Applications numériques relatives aux conditions qui rendent les abscisses x_1 et x_2 imaginaires, ou qui les font sortir des limites o et c	173
42. Recherche de la fonction $F(x)$	178
43. Remarques sur la disposition, la construction et l'usage des tableaux V, VI et VII	179
§ III. — *Effet spécial de la surcharge. — Division de chaque travée en régions, par les abscisses x', x'', x''', x^{IV}*	185
44. Des abscisses x', x'', x''', x^{IV}	185
45. Cas particuliers d'une travée extrême et d'une travée centrale.	192
46. Cas particulier d'un nombre infini de travées	194
47. Cas particulier $\delta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}1547...$	196
48. Tableaux numériques pour le calcul des abscisses x', x'', x''', x^{IV}.	196
§ IV. — *Effet spécial de la surcharge* (suite). — *Moments de flexion produits sur les points d'appui par diverses combinaisons de surcharges*	198
49. Moments de flexion sur les points d'appui quand toutes les travées sont surchargées de deux en deux	198
PREMIER CAS : n pair; la surcharge porte sur les travées paires.	198

Pages.

DEUXIÈME CAS : n pair; la surcharge porte sur les travées impaires 201
TROISIÈME CAS : n impair; la surcharge porte sur les travées paires 202
QUATRIÈME CAS : n impair; la surcharge porte sur les travées impaires 203
50. Moments produits aux points d'appui par une surcharge dans laquelle deux travées consécutives sont surchargées, le surplus de la poutre l'étant de deux en deux travées 204
PREMIER CAS : n et m pairs 204
DEUXIÈME CAS : n pair, m impair 211
Cas particulier : $m = 1$ 212
TROISIÈME CAS : n impair, m pair 214
QUATRIÈME CAS : n et m impairs 216
Cas particulier : $m = 1$ 217
51. Résultats numériques fournis par l'application des formules précédentes 218

§ V. — *Courbes enveloppes des moments de flexion* 220

52. Recherche des moments limites X', X'', dus à l'action isolée de la surcharge 220
53. Cas particuliers d'une travée de rive et d'une travée centrale. 223
1° Travée de rive 223
2° Travée centrale 224
54. Formulaire analytique donnant sans calcul les fonctions F, f_1, ψ_3, f_5 225
55. Recherche de la limite X''' 225
56. Exemple numérique 226
57. Représentation graphique de la limite X''' dans l'exemple précédent 232
58. Formulaire graphique, 1° pour la poutre à deux travées égales, 2° pour les poutres de trois à sept travées inclusivement, le rapport δ entre les longueurs des travées intermédiaires et de rive pouvant prendre les huit valeurs 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,25, 1,3 235
59. Remarque sur une ordonnée particulière des courbes représentant les limites X', X'' dans la seconde travée 238
60. Résumé succinct des paragraphes précédents; guide pratique. 239

§ VI. — *Questions diverses concernant les poutres symétriques et à travées intermédiaires égales* 243

61. De la poutre à deux travées égales 243

Pages.

62. Nécessité de tenir compte des écarts qui pourraient exister entre le polygone primitif et le polygone définitif des appuis. 246
63. Disposition propre à rendre minimum le moment fléchissant moyen, sous une charge uniforme........................ 250
64. Des moyens par lesquels on peut rendre égaux les moments de flexion sur tous les points d'appui d'une poutre soumise à une charge uniforme.. 266
65. Disposition propre à rendre minimum le plus grand moment de flexion produit par une charge uniforme.................. 269

TABLEAUX DE RÉSULTATS NUMÉRIQUES obtenus par diverses formules du Chapitre deuxième, avec des hypothèses particulières sur le rapport δ d'une travée intermédiaire à une travée extrême, et sur le nombre total n des travées.............. 275

TABLEAU I. — Série des nombres u, jusqu'à u_{n-1} inclusivement... 276
TABLEAU II. — Dernier nombre de la série u, ou u_n............. 277
TABLEAU III. — Série des nombres β, jusqu'à β_{n-2} inclusivement... 278
TABLEAU IV. — Dernier nombre de la série β, ou β_{n-1}........... 279
TABLEAU V. — Moments X_m produits sur les points d'appui par la charge permanente.. 280
TABLEAU VI. — Abscisses des points où s'annulent les moments de flexion dus à la charge permanente........................ 284
TABLEAU VII. — Coefficients — C des moments de flexion maxima, produits par la charge permanente, vers le milieu de chaque travée.. 292
TABLEAU VIII. — Calcul des abscisses x'', x'''.................... 293
TABLEAU IX. — Calcul des abscisses x', x^{IV}..................... 294
TABLEAU X. — Moments de flexion sur les appuis, quand les travées sont surchargées de deux en deux...................... 298
TABLEAU XI. — Moments de flexion sur trois appuis consécutifs, quand on surcharge les deux travées limitées par ces appuis, et les autres travées de deux en deux....................... 304
TABLEAU XII. — Abscisses x^{V} des moments maxima négatifs, qui sont produits par la surcharge seule, vers le milieu des travées.. 312
TABLEAU XIII. — Coefficients G des moments maxima négatifs, qui sont produits par la surcharge seule, vers le milieu des travées. 314

Pages.
FORMULAIRE ANALYTIQUE 315

Disposition et usage du Formulaire analytique 317
Valeurs de la fonction F (x) 323
Valeurs de la fonction $f_1(x)$ 333
Valeurs de la fonction $f_5(x)$ 341
Valeurs de la fonction $\psi_3(x)$ 351

PLANCHE A.

ATLAS COMPOSÉ DE 24 PLANCHES IN-FOLIO.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 31, ligne 6, *au lieu de* $z = 2(1 + l) - \frac{l}{z'}$, *lisez* $z = 2(1 + l) - \frac{l}{z}$.

Page 42, ligne 6 en remontant, *au lieu de* formule (15), *lisez* formule (14).

Page 67, ligne 13, *au lieu de* au milieu, *lisez* au lieu.

Page 75, ligne 10 en remontant,

$$\textit{au lieu de } -\frac{\gamma(1-\gamma)}{4(1-\beta\gamma)}, \textit{ lisez } -\frac{\gamma(1-\gamma)}{4(1-\beta\gamma)^2}.$$

Page 123, ligne 3, *au lieu de* de la fonction f, *lisez* des fonctions f ou ψ.

Page 209, dernière ligne, *au lieu de* $\frac{1}{4}p'b^2\delta^2 u_{m-1}$, *lisez* $\frac{1}{4}p'b^2\delta^3 u_{m-1}$.

Page 254, ligne 2, après le signe =, *au lieu de* $\frac{1}{2}pb^3$, *lisez* $\frac{1}{4}pb^3$.

Page 254, ligne 3, *au lieu de* $\frac{1}{2}pb^3$, *lisez* $\frac{1}{6}pb^3$.

COURS

DE

MÉCANIQUE APPLIQUÉE,

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

TROISIÈME PARTIE.

CALCUL DES MOMENTS DE FLEXION DANS UNE POUTRE A PLUSIEURS TRAVÉES SOLIDAIRES.



CHAPITRE PREMIER.

DES POUTRES A PLUSIEURS TRAVÉES, EN GÉNÉRAL.

---

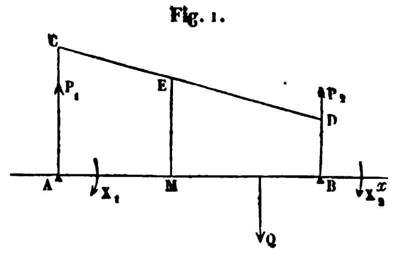
§ Ier. — Théorème relatif aux moments de flexion sur trois points d'appui consécutifs d'une poutre; remarques diverses.

1. *Expression particulière du moment de flexion en un point quelconque d'une travée.* — Par définition même, on appelle *moment fléchissant* ou *moment de flexion* la somme algébrique des moments des forces comprises entre une section arbitrairement choisie et une des deux extrémités de la pièce, les moments étant pris par rapport à un axe passant au centre d'élasticité (ou de gravité) de la section et perpendiculaire au plan dans lequel on suppose appliquées toutes les forces extérieures (*).

(*) On suppose ici que la déformation de la fibre moyenne a lieu dans le plan vertical qui la contient : cela exige que chaque section transversale de la poutre soit coupée par ce plan suivant un de ses axes principaux d'inertie au centre d'élasticité.

Si l'on veut exprimer analytiquement la valeur X de ce moment pour la section faite en un point quelconque M d'une travée AB (*fig.* 1), il semble donc d'abord qu'on sera obligé d'y introduire, non-seulement les forces agissant sur la partie MB de la travée, mais encore celles qui agissent sur les travées suivantes, y compris les réactions des appuis. Ces réactions sont inconnues *à priori*, de sorte que dans le cas général l'expression de X contiendrait un nombre indéterminé d'inconnues ou constantes auxiliaires qu'il faudrait ensuite éliminer, pour arriver, en fin de compte, à connaître numériquement X. Or un artifice de calcul très-simple permet, comme nous allons le montrer, de réduire à deux toutes ces constantes, quel que soit le nombre des travées de la poutre, tant à droite qu'à gauche de AB.

Fig. 1.



Faisons en effet une section dans la travée AB, infiniment près de l'appui B; chacune des forces extérieures situées entre cette section et l'extrémité de droite pourra se remplacer par une force égale et parallèle appliquée au centre d'élasticité de ladite section, et par un couple. Si de plus nous supposons, comme d'habitude, toutes les forces extérieures agissant dans le plan de la figure et perpendiculairement à AB, la résultante de translation sera égale à la somme algébrique des forces transportées : ce sera ce qu'on nomme l'*effort tranchant*, pour la section dont il s'agit. De même, la somme algébrique des couples fournira pour cette section le moment fléchissant.

Soient maintenant :

x la distance $\overline{AM}$ du point M à l'origine A de la travée, ou l'abscisse de M comptée à partir de A sur un axe Ax coïncidant avec la fibre moyenne de la pièce;

Q l'une des charges de la travée;

α l'abscisse de son point d'application;

a la longueur $\overline{AB}$ de la travée;

X_1 le moment fléchissant et P_1 l'effort tranchant dans la sec-

tion extrême de la travée AB, infiniment près de l'appui A, le sens positif étant ascendant pour P_1, et conforme à la flèche pour le moment d'une force prise à droite de A;

X_2 et P_2 les quantités analogues pour la section faite infiniment près de B, toujours dans l'espace AB.

Ainsi qu'on vient de le faire observer, toutes les forces extérieures qui agissent depuis la section voisine de B jusqu'à l'extrémité droite de la poutre peuvent se remplacer par la résultante de translation P_2 et le couple X_2; on aura donc pour le point M

$$(1) \qquad X = X_2 - P_2(a - x) + \sum_{\alpha=x}^{\alpha=a} Q(\alpha - x),$$

équation dans laquelle le signe $\sum$ indique une sommation à effectuer pour toutes les charges Q, continues ou non, de la portion MB, c'est-à-dire entre $\alpha = x$ et $\alpha = a$. Elle fournit une première expression de X avec deux inconnues auxiliaires seulement, X_2 et P_2; mais on peut en indiquer d'autres, et une parmi celles-là qui sera plus appropriée aux questions que nous devons traiter par la suite.

Pour y arriver, remarquons d'abord que la différence des deux résultantes P_1 et P_2 est égale à la somme des charges Q comprises entre A et B, c'est-à-dire que

$$(2) \qquad P_2 = P_1 + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=a} Q;$$

secondement qu'on a, en faisant $x = 0$ dans l'équation (1),

$$(3) \qquad X_1 = X_2 - P_2 a + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=a} Q\alpha.$$

Les deux équations précédentes permettent d'introduire dans la valeur de X, au lieu de X_2 et P_2, les combinaisons suivantes de deux inconnues auxiliaires, savoir :

$$X_1, P_2; \quad X_2, P_1; \quad X_1, P_1; \quad X_1, X_2;$$

c'est-à-dire toutes les combinaisons deux à deux des quatre lettres X_1, X_2, P_1, P_2, à l'exception de la combinaison P_1, P_2. Le résultat le plus important est fourni par la combinaison X_1, X_2, que l'on obtient en éliminant P_2 entre les relations (1) et (3). On trouve ainsi

$$X = X_2 - \left(X_2 - X_1 + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=a} Q\alpha\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \sum_{\alpha=x}^{\alpha=a} Q(\alpha - x),$$

ou bien

$$X = X_1 + (X_2 - X_1)\frac{x}{a} - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=a} \frac{Q\alpha}{a}(a - x) + \sum_{\alpha=x}^{\alpha=a} Q(\alpha - x);$$

soit enfin

(4) $$X = X_1 + (X_2 - X_1)\frac{x}{a} + \varphi(x),$$

si l'on pose, pour abréger,

(5) $$\varphi(x) = \sum_{\alpha=x}^{\alpha=a} Q(\alpha - x) - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=a} \frac{Q\alpha}{a}(a - x).$$

Chacune des deux parties $X_1 + (X_2 - X_1)\frac{x}{a}$ et $\varphi(x)$, qui composent le moment fléchissant X, peut se définir d'une manière bien simple. La première a une signification géométrique ou algébrique qu'on aperçoit de suite. Élevons en effet aux points A et B deux ordonnées $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, représentant les valeurs de X_1 et de X_2, en grandeur et en signe; l'ordonnée $\overline{ME}$ du point de la droite CD qui répond à l'abscisse x représentera de même la première partie de X, celle où entrent X_1 et X_2; ou, en d'autres termes, cette première partie exprime ce que serait le moment X s'il variait uniformément avec x, entre les valeurs extrêmes X_1 et X_2, répondant respectivement à $x = 0$ et $x = a$.

Quant à la seconde partie $\varphi(x)$, son sens, pour être un peu plus caché, n'en est pas moins simple et remarquable : *elle exprime ce que deviendrait le moment de flexion en chaque point de* AB, *si cette travée, conservant les charges* Q *qui lui sont propres, était* EFFECTIVEMENT SCIÉE *au-dessus des appuis* A

et B, *sur lesquels on la poserait sans encastrement, comme une poutre isolée et indépendante de tout le reste.* C'est là un fait aisé à constater. Si A et B devenaient deux appuis simples de la poutre AB privée de solidarité avec les travées voisines, l'appui B exercerait, en vertu de la charge Q, la réaction ascendante $\frac{Q\alpha}{a}$; cette charge, au cas où elle se trouverait sur la partie MB, produirait, dans le moment X pour le point M, les deux termes

$$Q(\alpha - x) - \frac{Q\alpha}{a}(a - x),$$

et, au cas où elle agirait dans l'intervalle MA, elle produirait seulement le dernier. Donc, en effectuant, pour les diverses forces, la somme des termes qui leur correspondent, on retrouve bien

$$\sum_{\alpha=x}^{\alpha=a} Q(\alpha - x) - \sum_{\alpha=o}^{\alpha=a} \frac{Q\alpha}{a}(a - x),$$

c'est-à-dire $\varphi(x)$.

La propriété qu'on vient d'établir ou, au besoin, l'équation (5) montrent que la fonction $\varphi(x)$ s'annule aux deux extrémités de la travée; cette fonction dépend seulement des charges appliquées dans la travée elle-même, et n'est influencée en rien par les forces qui sollicitent le restant de la poutre, forces dont l'effet se fait sentir par les moments X_1 et X_2. Voici deux exemples de sa détermination.

Soit d'abord le cas où il y aurait sur AB une seule charge Q, agissant à la distance α de l'origine A; posons $\alpha = qa$. Alors nous aurons

$$\text{entre } x = o \text{ et } x = qa \ldots \quad \varphi(x) = Q(qa - x) - Qq(a - x) = -Qx(1 - q),$$

$$\text{entre } x = qa \text{ et } x = a \ldots \quad \varphi(x) = -Qq(a - x).$$

La fonction pourrait se représenter par les ordonnées d'un triangle dont les sommets seraient les points A et B, et un troisième point sur la ligne de la force Q, ayant pour ordonnée $-Qaq(1 - q)$.

Considérons en second lieu une charge uniformément répartie, à raison de p kilogrammes par mètre courant, sur toute la longueur $\overline{AB} = a$. Les charges Q consistent ici en une infinité de charges élémentaires $p\,d\alpha$, et d'après l'équation (5) qui définit $\varphi(x)$, on a

$$\varphi(x) = \int_x^a p(\alpha - x)\,d\alpha - \int_0^a \frac{p\alpha}{a}(a - x)\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{2}p(a-x)^2 - \frac{1}{2}pa(a-x),$$

soit, en réduisant,

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}px(a-x),$$

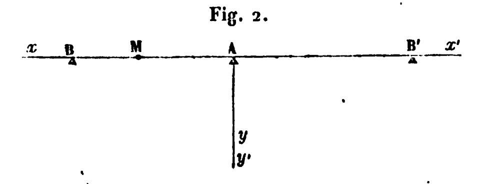
ce qu'on aurait pu voir également par la définition de $\varphi(x)$ en langage ordinaire.

Quoique nous ayons supposé, en vue des applications ultérieures, que A et B sont des points d'appui, remarquons en terminant que cette hypothèse n'est pas nécessaire à la démonstration, et que A et B pourraient être des points quelconques de la fibre moyenne : seulement, s'il y avait des appuis fixes dans leur intervalle, les réactions de ces appuis devraient entrer parmi les forces dont les moments composent $\varphi(x)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le théorème principal du § Ier, dont tout ce qui précède est une espèce de lemme.

2. *Théorème sur les moments de flexion en trois points d'appui consécutifs.* — Soient AB et AB′ (*fig.* 2) deux travées contiguës d'une même poutre, soutenues par les appuis B, A, B′, que nous regardons d'abord comme équivalents simplement à la fixité des points correspondants de la fibre moyenne. Nous prendrons pour axes coordonnés rectangulaires, dans la travée AB, les lignes Ax, Ay; dans la travée

Fig. 2.



AB', les lignes Ax', Ay', l'origine commune étant placée sur la verticale de l'appui intermédiaire, avec laquelle se confondent Ay et Ay'. La ligne xOx' sera d'ailleurs supposée en coïncidence avec la fibre moyenne dans son état primitif, c'est-à-dire quand la pièce n'éprouve encore aucune tension ou compression. Nous désignerons par :

X le moment fléchissant, pour un point M quelconque, entre A et B;

x, y les coordonnées de M après la déformation causée par les charges, laquelle est supposée se produire dans le plan vertical de xOx';

a la longueur $\overline{AB}$;

ε le moment de flexibilité de la section transversale, supposé constant pour toute la pièce;

X_1, X_2, X_3 les moments de flexion en B, A, B';

y_1, y_2, y_3 les ordonnées des mêmes points (*);

X', x', y', a' les quantités analogues, dans la travée AB', à celles que désignent les mêmes lettres non accentuées, pour la travée AB;

θ_1, θ_2, θ_3 les valeurs respectives de $\frac{dy}{dx}$ en B et A, et de $-\frac{dy'}{dx'}$ en B'.

Cela posé, on aura l'équation connue

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = X,$$

d'où, par une première intégration,

$$\varepsilon \left(\frac{dy}{dx} - \theta_2\right) = \int_0^x X\,dx,$$

(*) Si tous les supports avaient été dérasés à un niveau tel, que la poutre, prise dans son état primitif et soustraite à toute tension moléculaire, pût les toucher tous sans se déformer aucunement, et s'ils jouissaient d'une fixité absolue, il faudrait supposer $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Mais certaines inégalités dans ces ordonnées peuvent naître des tassements de la construction; quelquefois aussi le constructeur peut les avoir établies d'avance, avec intention. Nous essayerons plus loin d'apprécier, sur des exemples particuliers, les effets de cette disposition; mais le plus souvent nous admettrons la nullité des ordonnées y_1, y_2, y_3.

et, par une seconde,

$$\varepsilon(y - y_2 - \theta_2 x) = \int_0^x dx \int_0^x X dx,$$

ce qui, en intégrant par parties dans le second membre, peut s'écrire

$$\varepsilon(y - y_2 - \theta_2 x) = x \int_0^x X dx - \int_0^x X x dx.$$

Faisant $x = a$ dans cette équation, nous trouvons

$$\varepsilon(y_1 - y_2 - \theta_2 a) = a \int_0^a X dx - \int_0^a X x dx = \int_0^a X(a - x) dx.$$

Nous pouvons maintenant mettre au lieu de X sa valeur conforme à l'expression (4) du n° 1, savoir

$$X = X_2 + (X_1 - X_2)\frac{x}{a} + \varphi(x),$$

ce qui donne

$$\varepsilon(y_1 - y_2 - \theta_2 a) = \int_0^a \left[X_2 + (X_1 - X_2)\frac{x}{a} + \varphi(x)\right](a - x) dx$$

$$= \frac{1}{2} X_2 a^2 + (X_1 - X_2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) a^2 + \int_0^a \varphi(x)(a - x) dx,$$

ou, en réduisant et appliquant au dernier terme l'intégration par parties,

$$(m) \quad \varepsilon(y_1 - y_2 - \theta_2 a) = \frac{1}{6} X_1 a^2 + \frac{1}{3} X_2 a^2 + \frac{1}{2}\int_0^a \frac{d\varphi(x)}{dx}(a - x)^2 dx.$$

Une analyse semblable nous donnerait pour la travée AB' une équation toute pareille; il faudrait seulement remarquer que les x' ayant un sens opposé aux x, θ_2 doit se remplacer par $-\theta_2$, car les valeurs initiales de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{dy'}{dx'}$ pour $x = 0$, $x' = 0$, sont égales et de signe contraire. Si l'on nomme en outre $\varpi(x')$ la fonction analogue de $\varphi(x)$ dans la travée AB',

on aura

$$\varepsilon(y_3-y_2+\theta_2 a')=\frac{1}{6}X_3 a'^2+\frac{1}{3}X_2 a'^2+\frac{1}{2}\int_0^{a'}\frac{d\varpi(x')}{dx'}(a'-x')^2 dx'.$$

Éliminant alors θ_2 entre les deux dernières équations, nous trouverons

$$(6)\left\{\begin{aligned}&6\varepsilon\left[\frac{y_1}{a}-y_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+\frac{y_3}{a'}\right]=X_1 a+2X_2(a+a')+X_3 a'\\&+\frac{3}{a}\int_0^{a}\frac{d\varphi(x)}{dx}(a-x)^2 dx+\frac{3}{a'}\int_0^{a'}\frac{d\varpi(x')}{dx'}(a'-x')^2 dx'.\end{aligned}\right.$$

Cette relation exprime le théorème que nous avions en vue. Nous ne chercherons pas à le traduire en langage ordinaire, car à moins d'établir assez longuement un certain nombre de définitions préliminaires, nous ne saurions guère arriver qu'à un énoncé diffus et même difficile à comprendre sans avoir l'équation sous les yeux.

3. *Remarque au sujet des encastrements.* — L'usage est généralement consacré (au moins quand il s'agit des poutres longitudinales d'un pont à fermes rectilignes) d'assimiler les piles et culées à de simples points d'appui, et c'est ce que nous avons fait au nº 2. Cela sans doute n'est pas tout à fait conforme à la réalité, mais il ne serait pas non plus exact de compter sur un encastrement complet, par le seul effet de la largeur donnée aux supports dans le sens parallèle à l'axe de la poutre; l'étude rigoureuse de la question présenterait donc une complication assez grande. Ajoutons encore que si, par des dispositions convenables, on voulait produire des encastrements effectifs, l'obstacle ainsi apporté à la libre dilatation des poutres, sous l'action de la chaleur, pourrait entraîner de graves inconvénients : aussi les constructeurs paraissent-ils y avoir tout à fait renoncé. Mais on peut se demander, à titre d'étude théorique, comment il conviendrait de modifier les calculs du nº 2, si l'un quelconque des appuis ou plusieurs d'entre eux devenaient des encastrements.

Pour répondre à cette question, nous ferons observer que, dans le cas où le point A, par exemple, devient un encastre-

ment, l'inclinaison θ_2 prend une valeur connue et déterminée d'avance, car l'appui doit être disposé de manière à empêcher toute rotation qui modifierait la position angulaire de la fibre moyenne en A. Dès lors sa réaction ne se réduit pas nécessairement à une force unique passant par ce point, et si l'on y transporte parallèlement toutes les forces partielles qui composent cette réaction, il faut tenir compte en même temps d'un couple produit par le transport. Ce couple entre ou n'entre pas dans le moment fléchissant pour la section en A, suivant qu'on se place d'un côté ou de l'autre de ce point; par conséquent le moment X présente là une discontinuité et passe brusquement d'une certaine valeur X_2, applicable du côté de la travée AB, à une autre valeur X'_2 relative à la travée AB'. Donc, au lieu de l'équation finale (6) du n° 2, on devra prendre les deux équations

$$\varepsilon(y_1 - y_2 - \theta_2 a) = \frac{1}{6} X_1 a^2 + \frac{1}{3} X_2 a^2 + \frac{1}{2}\int_0^a \frac{d\varphi(x)}{dx}(a - x)^2 dx,$$

$$\varepsilon(y_3 - y_2 + \theta_2 a') = \frac{1}{6} X_3 a'^2 + \frac{1}{3} X'_2 a'^2 + \frac{1}{2}\int_0^{a'} \frac{d\varpi(x')}{dx'}(a' - x')^2 dx',$$

qui nous avaient conduit à l'équation (6) dans l'hypothèse où X_2 et X'_2 désignaient un même moment. Ici θ_2 est donné de sorte que la recherche des moments sur les points d'appui comporte une inconnue et une équation de plus que tout à l'heure.

Quand le point A est une extrémité et qu'on supprime une des deux travées AB ou AB', il est clair que l'on supprime une des quantités X_2 ou X'_2, qui devient nulle, et l'équation qui la contient disparaît en même temps.

Si la travée AB était encastrée à ses deux extrémités sous des inclinaisons connues θ_1, θ_2, et si, en même temps, on donnait les abaissements y_1, y_2, on aurait alors quatre conditions pour déterminer les deux constantes introduites par l'intégration de l'équation différentielle $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = X$, ainsi que les moments X_1, X_2. Le moment de flexion serait donc connu

pour un point quelconque de AB, puisqu'il dépend seulement (n° 1) des charges qui pèsent sur cette travée et des moments qui ont lieu aux extrémités; donc, enfin, la travée dont il s'agit pourrait être étudiée à part; sa flexion et sa résistance deviendraient indépendantes du reste de la pièce.

Dans ce qui précède (nos 2 et 3), nous avons supposé les charges Q absolument quelconques; nous allons maintenant faire des hypothèses particulières qui nous donneront des corollaires du théorème principal, utiles pour la suite de cet ouvrage.

4. *Application du théorème principal au cas où chaque travée supporte une charge concentrée unique.* — Supposons sur AB (*fig.* 2) une seule charge Q, dont l'abscisse α ou distance au point A serait exprimée par qa, q étant le rapport de cette distance à la longueur $\overline{AB} = a$; pareillement sur AB' une seule charge Q' à la distance $q'a'$ du même point A. En se servant des valeurs de la fonction $\varphi(x)$ indiquées plus haut (n° 1), on trouve

$$\text{entre } x = 0 \text{ et } x = qa \ldots\ldots \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = -Q(1-q),$$

$$\text{entre } x = qa \text{ et } x = a \ldots\ldots \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = Qq,$$

et par suite

$$\int_0^a \frac{d\varphi(x)}{dx}(a-x)^2 dx$$

$$= -Q(1-q)\int_0^{qa}(a-x)^2 dx + Qq\int_{qa}^a (a-x)^2 dx$$

$$= -\frac{1}{3}Qa^3(1-q)[1-(1-q)^3] + \frac{1}{3}Qa^3q(1-q)^3$$

$$= -\frac{1}{3}Qa^3q(1-q)[3-3q+q^2-(1-q)^2]$$

$$= -\frac{1}{3}Qa^3q(1-q)(2-q).$$

Cette intégration pourrait encore se faire par le procédé suivant, applicable à d'autres cas particuliers et parfois préférable. L'emploi de l'inté-

gration par parties donne

$$\int \frac{d\varphi(x)}{dx}(a-x)^2 dx = -\frac{1}{3}\frac{d\varphi(x)}{dx}(a-x)^3 + \frac{1}{3}\int \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}(a-x)^3 dx,$$

$$\int_0^a \frac{d\varphi(x)}{dx}(a-x)^2 dx = \frac{1}{3}a^3\left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_0 + \frac{1}{3}\int_0^a \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}(a-x)^3 dx,$$

la quantité entre crochets désignant la valeur particulière de la dérivée $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, pour $x = 0$. On est ainsi ramené à la recherche de l'intégrale $\int \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}(a-x)^3 dx$: or, dans le cas actuel, $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ est constamment nulle puisque $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ est constante, sauf pour $x = qa$, point où $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ changeant brusquement de valeur, sa dérivée $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ devient infinie. On a pour ce point

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}dx = d\frac{d\varphi(x)}{dx} = Qq + Q(1-q) = Q;$$

donc la dernière intégrale se réduit à un seul élément et a pour valeur

$$\frac{1}{3}Q(a-qa)^3 = \frac{1}{3}Qa^3(1-q)^3;$$

donc aussi

$$\int_0^a \frac{d\varphi(x)}{dx}(a-x)^2 dx = -\frac{1}{3}Qa^3(1-q) + \frac{1}{3}Qa^3(1-q)^3$$

$$= -\frac{1}{3}Qa^3(1-q)[1-(1-q)^2] = -\frac{1}{3}Qa^3q(1-q)(2-q).$$

Par un procédé tout semblable on trouverait

$$\int_0^{a'} \frac{d\varpi(x')}{dx'}(a'-x')^2 dx' = -\frac{1}{3}Q'a'^3q'(1-q')(2-q');$$

l'équation (6) du n° 2 deviendra donc, par la substitution de ces intégrales,

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &6\varepsilon\left[\frac{y_1}{a} - y_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right) + \frac{y_3}{a'}\right] = X_1a + 2X_2(a+a') + X_3a' \\ &\quad - Qa^2q(1-q)(2-q) - Q'a'^2q'(1-q')(2-q'). \end{aligned}\right.$$

Si l'on voulait que la position des deux forces Q, Q', au lieu d'être définie par leurs distances à l'appui intermédiaire, fût définie par la distance de chacune d'elles à l'appui le plus voisin vers la droite, en représentant par $q'a'$ la distance entre Q' et le point B', il faudrait, dans l'équation précédente, changer q' en $1-q'$ et écrire

$$(8)\left\{\begin{array}{l} 6\varepsilon\left[\frac{y_1}{a}-y_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+\frac{y_3}{a'}\right]=X_1a+2X_2(a+a')+X_3a' \\ \quad -Qa^2q(1-q)(2-q)-Q'a'^2q'(1-q'^2). \end{array}\right.$$

Si, au lieu de prendre les distances à droite, on les avait prises à gauche, le terme contenant Q' dans l'équation (7) n'aurait pas été modifié, et celui qui contient Q serait devenu $-Qa^2q(1-q^2)$.

5. *Cas de charges quelconques.* — Avant de montrer comment la formule (7) ou son équivalente (8) comprennent tous les cas possibles, relativement à la distribution des charges dans chaque travée, nous devons rappeler un théorème démontré dans la première partie de ce Cours (*), et dont voici l'énoncé : Étant connus les effets produits par une série de forces agissant isolément, on en déduit l'effet total dû à la réunion de toutes ces forces, par une composition semblable à celles des vitesses d'un même point; et si ces effets sont un déplacement dans une direction donnée, ou un moment fléchissant parallèle à un plan fixe, la composition se changera en une somme algébrique.

Cela posé, admettons, par exemple, qu'il y ait dans la première travée AB (*fig.* 2) trois charges Q, R, S, et dans la seconde AB' deux charges Q', R'. On imaginerait que l'une des deux formules (7) ou (8) fût appliquée cinq fois, en ne conservant à chaque fois qu'une des cinq forces Q, R, S, Q', R'. Faisant alors la somme des cinq équations ainsi obtenues, et appliquant le théorème ci-dessus, on trouverait une équation finale ayant le même premier membre et les mêmes termes en X_1, X_2, X_3; seulement ces trois notations y désigneraient, ainsi que y_1, y_2,

(*) Chapitre deuxième, § III, p. 111 et suivantes.

y_3, les valeurs relatives à l'action simultanée des cinq forces, et chacune de celles-ci figurerait dans le second membre avec un coefficient tout à fait analogue à ceux de Q et Q′ dans les formules (7) et (8). L'équation finale serait donc, dans le cas où l'on aurait fait usage de la formule (7),

$$6\varepsilon\left[\frac{y_1}{a}-y_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+\frac{y_3}{a'}\right]=X_1a+2X_2(a+a')+X_3a'$$
$$-Qa^2q(1-q)(2-q)-Ra^2r(1-r)(2-r)$$
$$-Sa^2s(1-s)(2-s)$$
$$-Q'a'^2q'(1-q')(2-q')-R'a'^2r'(1-r')(2-r'),$$

les notations qa, ra, sa, $q'a'$, $r'a'$ désignant les distances respectives du point A aux cinq forces Q, R, S, Q′, R′.

La démonstration précédente suppose que les ordonnées y_1, y_2, y_3 ont des valeurs variables avec les charges et composées de termes proportionnels à chacune d'elles, à moins cependant qu'on n'ait toujours $y_1=y_2=y_3$, ce qui ferait disparaître ces quantités de l'équation, et les dispenserait de remplir aucune condition quant à leur loi de croissance. Or on conçoit (entre autres circonstances pouvant se réaliser) que les appuis aient été construits à des niveaux fixes, mais dont quelques-uns se trouveraient, dans l'état naturel de la poutre, à une petite distance au-dessus ou au-dessous de celle-ci : par exemple, on aurait $y_1=y_3=0$, et $y_2=$ une certaine valeur qui se produirait avec une partie des charges, sans pouvoir être dépassée quand on ajouterait un surcroît de charges nouvelles. En pareil cas, l'équation finalement trouvée n'en serait pas moins vraie, car il s'agit simplement de savoir ce que deviennent les intégrales

$$\int_0^a \frac{d\varphi(x)}{dx}(a-x)^2\,dx,\qquad \int_0^{a'} \frac{d\varpi(x')}{dx'}(a'-x')^2\,dx',$$

qui entrent dans le second membre de l'équation (6). Or les moments $\varphi(x)$ et $\varpi(x')$ sont des fonctions linéaires des forces, sans terme indépendant; donc on aura ces intégrales en faisant la somme de leurs valeurs partielles quand chaque force agit seule, et c'est bien ainsi que nous avons procédé.

Mais ce qui est modifié par l'hypothèse que nous examinons

maintenant, c'est le théorème sur la superposition des effets des forces; ce théorème n'est plus exact pour les abaissements de la poutre, ni pour les moments de flexion qui se produisent en ses divers points. Cela constitue, pour le principe général, une exception assez importante qu'il convenait de mentionner en passant. Du reste, on n'aura, pour ainsi dire, pas à s'en préoccuper en lisant cet ouvrage, car nous y admettrons à peu près invariablement l'égalité des ordonnées y sur tous les points d'appui.

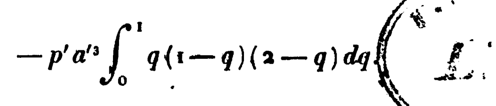
Les mêmes formules (7) et (8) peuvent encore s'employer avec des charges à répartition continue, car une charge de cette nature peut toujours être considérée comme formée par la réunion d'une infinité de charges isolées infiniment petites. Toutes ces charges élémentaires donneraient lieu, dans le second membre de l'équation finale obtenue comme on vient de le dire, à une infinité de termes, dont la réunion formerait une intégrale définie; on les remplacerait donc par la valeur exacte ou approximative de cette intégrale. En voici un exemple particulier très-utile à considérer pour les applications ultérieures.

6. *Cas de poids uniformément répartis sur la longueur entière des travées.* — Nous plaçons sur les travées AB et AB′ (*fig.* 2) des poids pa et $p'a'$, uniformément répartis, à raison de p kilogrammes par mètre courant sur la première, et de p' kilogrammes, aussi par mètre courant, sur la seconde. Nous considérerons la charge pa comme composée d'une infinité d'éléments, dont l'un, $pa.dq$, agit à la distance qa du point A, q étant une quantité qui varie par degrés insensibles depuis o jusqu'à 1. Dès lors, au lieu des termes en Q, R, S,..., de la dernière équation, nous aurons l'intégrale

$$-\int_0^1 pa^3 q(1-q)(2-q)dq \quad \text{ou} \quad -pa^3\int_0^1 q(1-q)(2-q)\,dq;$$

de même, les termes en Q′, R′ seront remplacés par

$$-p'a'^3\int_0^1 q(1-q)(2-q)\,dq$$





Or, on trouve par un calcul fort simple

$$\int q(1-q)(2-q)\,dq = \int (2q-3q^2+q^3)\,dq = q^2-q^3+\frac{1}{4}q^4,$$

$$\int_0^1 q(1-q)(2-q)\,dq = \frac{1}{4};$$

donc la dernière équation du n° 5 deviendra

$$(9)\quad \begin{cases} 6\varepsilon\left[\dfrac{y_1}{a} - y_2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a'}\right) + \dfrac{y_3}{a'}\right] = X_1 a + 2X_2(a+a') + X_3 a' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{1}{4}pa^3 - \dfrac{1}{4}p'a'^3. \end{cases}$$

On serait arrivé au même résultat par la formule (6) du n° 2, en employant les valeurs

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}px(a-x), \quad \varpi(x') = -\frac{1}{2}p'x'(a'-x'),$$

données au n° 1. On doit, pour appliquer cette formule, chercher les intégrales

$$A = \int_0^a \frac{d\varphi(x)}{dx}(a-x)^2\,dx, \quad B = \int_0^{a'} \frac{d\varpi(x')}{dx'}(a-x')^2\,dx',$$

soit en effectuant la dérivation de φ et de ϖ,

$$-\frac{1}{2}p\int_0^a (a-2x)(a-x)^2\,dx,$$

$$-\frac{1}{2}p'\int_0^{a'} (a'-2x')(a'-x')^2\,dx'.$$

L'intégration par parties donne immédiatement

$$\int (a-2x)(a-x)^2dx = -\frac{1}{3}(a-2x)(a-x)^3 - \frac{2}{3}\int (a-x)^3dx$$

$$= -\frac{1}{3}(a-2x)(a-x)^3 + \frac{1}{6}(a-x)^4,$$

$$\int_0^a (a-2x)(a-x)^2dx = \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{6}a^4 = \frac{1}{6}a^4,$$

et aussi

$$\int_0^{a'} (a' - 2x')(a' - x')^2 dx' = \frac{1}{6} a'^4;$$

donc on a

$$A = -\frac{1}{12} pa^4, \quad B = -\frac{1}{12} p'a'^4.$$

La substitution de ces intégrales dans la formule (6) fournit bien une équation identique avec la formule (9).

Si dans cette dernière équation nous faisons $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, c'est-à-dire si, conformément à l'usage ordinaire, nous supposons parfaitement fixes tous les points de la fibre moyenne primitive qui sont placés au-dessus des appuis, nous aurons

$$(10) \quad X_1 a + 2X_2(a + a') + X_3 a' - \frac{1}{4} pa^3 - \frac{1}{4} p'a'^3 = 0.$$

C'est l'équation connue, entre les moments de flexion sur trois points d'appui consécutifs, donnée par M. Clapeyron, et avant lui par M. Bertot; nous la retrouvons ici comme cas particulier d'un théorème beaucoup plus général, puisqu'il ne repose sur aucune hypothèse particulière quant à la distribution des charges, ni quant à l'inégalité de niveau des appuis.

7. *Recherche des réactions des appuis.* — Dans la théorie des poutres à plusieurs travées solidaires, telle que nous la présentons ici, on arrive à déterminer les moments fléchissants sans avoir besoin de connaître les réactions des appuis, comme on le verra dans les paragraphes suivants. Mais il peut être bon néanmoins de déterminer ces réactions, ne fût-ce que pour vérifier la stabilité des appuis eux-mêmes, et l'on y parviendra sans peine, pour un appui quelconque tel que A (*fig.* 2), quand on aura les valeurs numériques des trois moments désignés ci-dessus par X_1, X_2, X_3.

Reprenons en effet la poutre dont AB, AB' sont deux travées consécutives de rang quelconque. La portion située à gauche du point M, jusqu'à l'extrémité de la poutre, est soumise à une série de forces verticales, parmi lesquelles nous comprenons les réactions des appuis : si Q désigne l'une de ces forces,

affectée du signe + ou du signe — suivant qu'elle sera descendante ou ascendante, α l'abscisse de son point d'application relativement à la verticale Ay, x l'abscisse de M, on aura pour valeur du moment de flexion en ce point une somme telle que

$$\sum Q(\alpha - x) = X,$$

et il en résultera, en faisant varier x,

$$-\frac{dX}{dx} = \sum Q.$$

Donc la valeur particulière de $-\frac{dX}{dx}$ pour $x = 0$, soit $-\left(\frac{dX}{dx}\right)_0$, est égale à la somme algébrique de toutes les forces verticales comprises entre l'appui A et l'extrémité de gauche, le sens positif étant de haut en bas. De même, si X′ désigne le moment de flexion en tout point de AB′, la valeur particulière $-\left(\frac{dX'}{dx'}\right)_0$ représentera la somme algébrique des forces verticales entre l'appui A et l'extrémité de droite. Donc la réaction de T de cet appui, comptée positivement de bas en haut, sera, d'après l'équilibre de toutes les forces du système en projection verticale,

$$T = -\left(\frac{dX}{dx}\right)_0 - \left(\frac{dX'}{dx'}\right)_0.$$

Or on a (n° 1)

$$X = X_2 + (X_1 - X_2)\frac{x}{a} + \varphi(x),$$

$$X' = X_2 + (X_3 - X_2)\frac{x'}{a'} + \varpi(x'),$$

et par suite

$$\frac{dX}{dx} = \frac{X_1 - X_2}{a} + \varphi'(x),$$

$$\frac{dX'}{dx'} = \frac{X_3 - X_2}{a'} + \varpi'(x');$$

donc aussi

$$T = \frac{X_2 - X_1}{a} - \varphi'(o) + \frac{X_2 - X_3}{a'} - \varpi'(o)$$
$$= -\varphi'(o) - \varpi'(o) - \frac{X_1}{a} + X_2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) - \frac{X_3}{a'}.$$

On sait (n° 1) que $\varphi(x)$ et $\varpi(x')$ représentent les valeurs que prendraient les moments X et X' si la poutre était effectivement sciée au-dessus des appuis B, A, B' : après cette opération, les moments X_1, X_2, X_3 s'annuleraient, et la réaction de l'appui A deviendrait

$$t = -\varphi'(o) - \varpi'(o);$$

la quantité

$$-\frac{X_1}{a} + X_2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) - \frac{X_3}{a'}$$

exprime comment cette réaction fictive se modifie par suite de la solidarité qui existe entre les travées; par exemple, dans un pont chargé uniformément sur la longueur de chaque travée, elle fait connaître l'excès positif ou négatif de la réaction réelle d'un appui sur la demi-somme des poids des travées adjacentes.

8. *Relation entre les inclinaisons de la fibre moyenne au-dessus de trois points d'appui consécutifs, supposés de niveau.* — Cette relation, quoique simple et assez remarquable, ne nous paraît pas avoir un bien grand intérêt pratique; c'est pour cela que nous laissons de côté le cas où les appuis ne sont pas tous disposés de manière à rendre nulles les ordonnées des points qui leur correspondent sur la fibre moyenne.

Reprenons l'équation

$$\varepsilon\left(\frac{dy}{dx} - \theta_2\right) = \int_0^x X\,dx$$

trouvée au n° 2, et mettons à la place de X sa valeur (n° 1)

$$X = X_2 + (X_1 - X_2)\frac{x}{a} + \varphi(x),$$

il viendra, en effectuant l'intégration autant que possible,

$$\varepsilon\left(\frac{dy}{dx}-\theta_2\right)=X_2x+(X_1-X_2)\frac{x^2}{2a}+\int_0^x\varphi(x)\,dx,$$

et si l'on fait $x=a$,

$$\varepsilon(\theta_1-\theta_2)=\frac{1}{2}(X_1+X_2)a+\int_0^a\varphi(x)\,dx.$$

Or on a trouvé aussi, au n° 2, la relation

$$\varepsilon(y_1-y_2-\theta_2 a)=\int_0^a\left[X_2+(X_1-X_2)\frac{x}{a}+\varphi(x)\right](a-x)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}X_1a^2+\frac{1}{3}X_2a^2+\int_0^a\varphi(x)(a-x)\,dx,$$

qui, par la supposition de y_1 égal à y_2, devient

$$-\varepsilon\theta_2=\frac{1}{6}(X_1+2X_2)a+\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(x)(a-x)\,dx;$$

on peut donc éliminer X_1, et l'on trouve

$$(11)\quad \varepsilon(\theta_1+2\theta_2)=-\frac{1}{2}X_2a+\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(x)(3x-2a)\,dx.$$

En opérant de même sur l'autre travée qui aboutit en A (*fig.* 2), on trouverait

$$-\varepsilon(\theta_3+2\theta_2)=-\frac{1}{2}X_2a'+\frac{1}{a'}\int_0^{a'}\varpi(x')(3x'-2a')\,dx';$$

l'élimination de X_2 entre les deux dernières équations donne alors

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&\varepsilon\left[\frac{\theta_1}{a}+2\theta_2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+\frac{\theta_3}{a'}\right]=\frac{1}{a^2}\int_0^a\varphi(x)(3x-2a)\,dx\\&\qquad-\frac{1}{a'^2}\int_0^{a'}\varpi(x')(3x'-2a')\,dx'.\end{aligned}\right.$$

Telle est la relation que nous voulions démontrer.

Quand on y suppose $a = a'$ et $\varphi(x) = \varpi(x')$, ce qui arriverait si deux travées adjacentes et égales étaient chargées symétriquement par rapport à leur point commun, elle devient

$$(13) \qquad \theta_1 + 4\theta_2 + \theta_3 = 0,$$

formule très-simple, déjà démontrée par M. Clapeyron, pour le cas des charges uniformément réparties.

Si maintenant on reprend l'équation (11) applicable à la seule travée AB, quelle que soit sa position parmi les autres, on peut considérer le cas où le point A serait une extrémité de la poutre. Alors, puisqu'il faut, pour l'équilibre de celle-ci, égaler à zéro la somme des moments de toutes les forces par rapport à A, on en conclut que le moment de flexion est nul en ce point, et par suite, faisant $X_2 = 0$, on aura

$$(14) \qquad \varepsilon(\theta_1 + 2\theta_2) = \frac{1}{a}\int_0^a \varphi(x)(3x - 2a)\,dx.$$

De là résulte un fait assez remarquable : quand on connaît les charges dans une travée de rive, et par conséquent la fonction $\varphi(x)$ dans cette travée, cela suffit pour déterminer la somme algébrique $\theta_1 + 2\theta_2$, formée par le double de l'inclinaison au point extrême et par l'inclinaison sur l'appui suivant.

Les relations (12) et (14) permettent d'avoir toutes les inclinaisons θ sur les appuis d'une poutre, quel qu'en soit le nombre, quand toutes les charges sont connues, et que les appuis, tous simples points fixes sans encastrement, sont sur la fibre moyenne primitive. Soit donnée en effet une poutre à n travées, ayant par conséquent $(n+1)$ appuis ; on appliquera d'abord la relation (12) à tous les groupes de deux travées consécutives, en nombre $n-1$, puis la relation (14) aux deux travées extrêmes, et l'on aura ainsi $n+1$ équations entre un pareil nombre d'inconnues. Prenons comme exemple numérique une poutre à trois travées égales, chargée uniformément sur toute sa longueur ; nommons θ_1 et θ_2 les inclinaisons sur un appui de rive et sur l'appui suivant ; les deux autres inclinaisons seront, en raison de la symétrie, $-\theta_2$ et $-\theta_1$, de sorte que la question ne comportera que deux inconnues. Or l'équation (13), appli-

cable au cas actuel, devient

$$\theta_1 + 3\theta_2 = 0;$$

l'équation (14), en y faisant $\varphi(x) = -\frac{1}{2}px(a-x)$, donnera

$$-\varepsilon(2\theta_1 + \theta_2) = \frac{1}{24}pa^3,$$

d'où résulte

$$-\theta_1 = \frac{1}{40}\frac{pa^3}{\varepsilon}, \quad \theta_2 = \frac{1}{120}\frac{pa^3}{\varepsilon}.$$

Il nous semble superflu de développer davantage ces considérations, dont les applications seraient très-restreintes dans la pratique. Nous allons passer à la recherche, beaucoup plus importante, des moments fléchissants produits, soit par une charge concentrée unique, soit par une charge uniformément répartie. Cette recherche est fondée, comme on va le voir, sur le théorème principal démontré plus haut (n° 2), dont la formule (6) est l'expression algébrique générale.

§ II. — Détermination des moments fléchissants produits par une charge concentrée unique, lorsque tous les points de la fibre moyenne primitive situés au-dessus des appuis ont une fixité absolue.

9. *Formation et étude préliminaire de quelques séries numériques.* — Soit donnée une poutre de n travées, reposant par conséquent sur $n+1$ appuis qu'on suppose numérotés en allant de gauche à droite, et qu'on désignera par

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{m-2}, A_{m-1}, A_m, \ldots, A_{n-1}, A_n;$$

nous appellerons

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{m-1}, a_m, \ldots, a_{n-1}, a_n,$$

les longueurs successives des travées, la première étant la distance $\overline{A_0A_1}$, la seconde $\overline{A_1A_2}$, la troisième $\overline{A_2A_3}$, et généralement la $m^{ième}$ étant $\overline{A_{m-1}A_m}$.

Cela posé, nous considérerons en premier lieu deux séries,

chacune de n nombres,

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, u_n,$$
$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n,$$

déterminés par les équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2u_1(a_1+a_2)+u_2a_2=0, \\ u_1a_2+2u_2(a_2+a_3)+u_3a_3=0, \\ u_2a_3+2u_3(a_3+a_4)+u_4a_4=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{m-2}a_{m-1}+2u_{m-1}(a_{m-1}+a_m)+u_ma_m=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-2}a_{n-1}+2u_{n-1}(a_{n-1}+a_n)+u_na_n=0, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2v_1(a_n+a_{n-1})+v_2a_{n-1}=0, \\ v_1a_{n-1}+2v_2(a_{n-1}+a_{n-2})+v_3a_{n-2}=0, \\ v_2a_{n-2}+2v_3(a_{n-2}+a_{n-3})+v_4a_{n-3}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n-m}a_m+2v_{n-m+1}(a_m+a_{m-1})+v_{n-m+2}a_{m-1}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n-2}a_2+2v_{n-1}(a_2+a_1)+v_na_1=0, \end{array} \right.$$

auxquelles on joint encore

$$u_1=v_1=1.$$

Ces deux groupes d'équations (1) et (2) ont une forme générale facile à saisir; de plus, ils ne diffèrent l'un de l'autre que par le changement de l'ordre des travées, c'est-à-dire qu'on passe du premier au second en mettant a_n au lieu de a_1, a_{n-1} au lieu de $a_2, \ldots$, a_{n-m+1} au lieu de a_m. Il est donc visible *à priori* que les deux séries u et v sont composées de la même manière et qu'elles doivent présenter les mêmes caractères généraux.

Le calcul pratique des deux séries ainsi définies ne donnerait lieu, dans chaque cas particulier, à aucune difficulté d'exécution. Faisant $u_1=1$ dans la première équation du groupe (1), on en tirerait u_2; portant ces valeurs de u_1 et u_2 dans l'équation suivante, on aurait u_3; et ainsi de suite, de proche en

proche. Chaque équation du groupe (1) fournit généralement un nombre u, au moyen des deux qui le précèdent dans la série. Il en est tout à fait de même pour les nombres v. Mais ce n'est pas assez d'avoir constaté la marche simple et naturelle du calcul; il faut pénétrer plus avant dans la question, et découvrir quelques-unes des propriétés intimes qui caractérisent ces deux séries.

Remarquons d'abord en passant qu'elles ont une liaison entre elles. Nous pouvons, en effet, éliminer $\frac{a_2}{a_1}$ entre la première équation du groupe (1) et la dernière du groupe (2), $\frac{a_3}{a_2}$ entre l'équation suivante dans le premier groupe et l'équation précédente dans l'autre, etc.; on trouve ainsi

$$\begin{gathered}
\frac{v_n + 2v_{n-1}}{v_{n-2} + 2v_{n-1}} = \frac{2u_1}{u_2 + 2u_1},\\
\frac{v_{n-1} + 2v_{n-2}}{v_{n-3} + 2v_{n-2}} = \frac{u_1 + 2u_2}{u_3 + 2u_2},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\frac{v_{n-m+2} + 2v_{n-m+1}}{v_{n-m} + 2v_{n-m+1}} = \frac{u_{m-2} + 2u_{m-1}}{u_m + 2u_{m-1}},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\frac{v_3 + 2v_2}{v_1 + 2v_2} = \frac{u_{n-3} + 2u_{n-2}}{u_{n-1} + 2u_{n-2}},\\
\frac{v_2 + 2v_1}{2v_1} = \frac{u_{n-2} + 2u_{n-1}}{u_n + 2u_{n-1}},
\end{gathered}$$

soit en tout n relations par lesquelles on pourrait, assez simplement, passer des u aux v, ou inversement. Mais il ne semble pas que cette dépendance mutuelle puisse conduire à des conséquences bien utiles pour les applications; nous n'insisterons donc pas davantage sur ce point.

Voici maintenant la propriété la plus importante. La première équation (1) donne

$$-\frac{u_2}{u_1} = 2\left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right),$$

d'où il résulte que le rapport $-\frac{u_2}{u_1}$ est positif et supérieur à 2. On a aussi, par l'équation suivante,

$$-\frac{u_3}{u_2} = 2\left(1+\frac{a_2}{a_3}\right) + \frac{u_1 a_2}{u_2 a_3} = 2 + \frac{a_2}{a_3}\left(2+\frac{u_1}{u_2}\right);$$

or, d'après ce qu'on vient de voir, le nombre négatif $\frac{u_1}{u_2}$ n'atteint pas $\frac{1}{2}$, de sorte que $2+\frac{u_1}{u_2}$ est positif; donc $-\frac{u_3}{u_2}$ est positif et supérieur à 2. Partant de là, nous pourrions répéter le même raisonnement et reconnaître que la même propriété existe pour $-\frac{u_4}{u_3}$; pour plus de généralité, montrons de suite que si elle appartient à $\frac{u_{m-1}}{u_{m-2}}$, elle est, par cela même, encore vraie quand on augmente les indices d'une unité. Dans ce but, prenons la $(m-1)^{ième}$ équation (1) et mettons-la sous la forme

$$(3) \qquad -\frac{u_m}{u_{m-1}} = 2 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\left(2+\frac{u_{m-2}}{u_{m-1}}\right);$$

il n'y aura plus alors qu'à répéter mot pour mot ce qu'on a dit au sujet de $-\frac{u_3}{u_2}$. Nous sommes donc en droit d'affirmer que $-\frac{u_m}{u_{m-1}}$ est un nombre positif supérieur à 2, quel que soit l'indice m à partir de $m=2$, et quelles que soient aussi les ouvertures $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Il en est de même, bien entendu, pour $-\frac{v_m}{v_{m-1}}$. Ainsi donc :

THÉORÈME. — *Les deux séries*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \ldots, \quad u_n,$$
$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad v_4, \ldots, \quad v_n,$$

se composent chacune de termes alternativement positifs et négatifs, le signe + appartenant aux indices impairs; dans l'une ou l'autre les valeurs absolues croissent plus rapidement

que la progression géométrique

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\ldots,\quad 2^{n-1}.$$

Les deux séries u et v suffiraient à la rigueur pour la solution de tous les problèmes que nous avons en vue sur la poutre à n travées; toutefois il sera bon d'en employer concurremment deux autres déduites des précédentes. Nous supposerons donc que l'on calcule encore les rapports

$$0,\quad -\frac{u_1}{u_2},\quad -\frac{u_2}{u_3},\quad -\frac{u_3}{u_4},\ldots,\quad -\frac{u_{m-1}}{u_m},\ldots,\quad -\frac{u_{n-1}}{u_n},$$

$$0,\quad -\frac{v_1}{v_2},\quad -\frac{v_2}{v_3},\quad -\frac{v_3}{v_4},\ldots,\quad -\frac{v_{m-1}}{v_m},\ldots,\quad -\frac{v_{n-1}}{v_n},$$

qui seront désignés par

$$\beta_0,\quad \beta_1,\quad \beta_2,\quad \beta_3,\ldots,\quad \beta_{m-1},\ldots,\quad \beta_{n-1},$$

$$\gamma_0,\quad \gamma_1,\quad \gamma_2,\quad \gamma_3,\ldots,\quad \gamma_{m-1},\ldots,\quad \gamma_{n-1}.$$

Chacun de ces nombres nouveaux sera plus particulièrement affecté, comme la suite le montrera, aux calculs à faire dans une certaine travée. Voici un tableau indiquant les travées avec leurs β et γ corrélatifs :

A_0A_1,	A_1A_2,	$A_2A_3,\ldots,$	$A_{m-1}A_m,\ \ldots,$	$A_{n-1}A_n,$
β_0,	β_1,	$\beta_2,\ldots,$	$\beta_{m-1},\ldots,$	$\beta_{n-1},$
γ_{n-1},	γ_{n-2},	$\gamma_{n-3},\ldots,$	$\gamma_{n-m},\ldots,$	$\gamma_0.$

Cette corrélation est d'ailleurs ici purement conventionnelle, et il est parfaitement permis, sans justification aucune, d'appeler β_{m-1} (par exemple) *le* β *de la* $m^{\text{ième}}$ *travée.*

Le théorème établi tout à l'heure, concernant la loi de croissance des séries u et v, montre que tous les β et γ sont des nombres positifs et ne pouvant varier que depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{2}$. Chacune de ces deux limites a d'ailleurs une signification remarquable qu'il est utile de signaler. Supposons d'abord que le β de la $m^{\text{ième}}$ travée (celle qui a pour longueur a_m) devienne égal à $\frac{1}{2}$; on aura donc

$$-\frac{u_m}{u_{m-1}} = \frac{1}{\beta_{m-1}} = 2,$$

et, d'après l'équation (3),

$$a_{m-1} = 0,$$

car $2 + \frac{u_{m-2}}{u_{m-1}}$ ne peut être supposé nul. Or, $a_{m-1} = 0$ signifierait que les appuis A_{m-2} et A_{m-1} sont confondus en un seul, c'est-à-dire que la direction de la tangente à la fibre moyenne est maintenue invariable en A_{m-1}, ou encore que ce point d'appui équivaut à un *encastrement*. De même, on verrait que l'hypothèse $\gamma_{n-m} = \frac{1}{2}$ entraînerait la nullité de a_{m+1}, c'est-à-dire la transformation de l'appui A_m en encastrement. Au contraire, pour que β_{m-1} pût s'annuler, il faudrait avoir, en vertu de la même équation (3),

$$a_{m-1} = \infty,$$

et, pour annuler γ_{n-m}, il faudrait rendre infinie la longueur a_{m+1}. La signification physique de ces travées infinies n'est peut-être pas aussi manifeste que celle des travées nulles, mais elle le deviendra quand on aura reconnu que si le β d'une travée $A_{m-1}A_m$ s'annule, le moment de flexion sur l'appui de gauche A_{m-1} sera lui-même généralement nul (*), en sorte que, malgré la solidarité de la travée $A_{m-1}A_m$ avec sa voisine $A_{m-2}A_{m-1}$, la première devra être considérée comme reposant en A_{m-1} sur un appui d'extrémité, ou encore, si l'on veut, comme sciée en ce point.

Ainsi donc, en résumé, *les hypothèses extrêmes* $\beta_{m-1} = \frac{1}{2}$ et $\beta_{m-1} = 0$ *répondent aux deux cas limites où l'appui* A_{m-1} *fonctionnerait, à l'égard de la* $m^{ième}$ *travée, comme encastrement complet ou comme simple appui d'extrémité. Les deux limites de* γ_{n-m} *ont, pour l'autre appui* A_m *de la même travée, un sens tout à fait analogue.*

Mais il est clair que quand une poutre repose sur une suite de points fixes, les rapports entre les longueurs de deux travées consécutives ne sont jamais ni nuls ni infinis; aussi ne

---

(*) Ce fait n'est soumis qu'à un cas d'exception : nous y reviendrons plus loin.

peut-on pas rencontrer des nombres β et γ devenant rigoureusement égaux à l'une de leurs limites. En d'autres termes, par l'effet de la continuité de la poutre, les deux appuis qui terminent une travée constituent toujours pour elle quelque chose d'intermédiaire entre le simple point fixe et l'encastrement, sans être absolument l'un ou l'autre.

Au reste, quand on assigne des limites aux rapports entre les longueurs de deux travées consécutives, au lieu de les laisser variables de o à ∞, on peut par cela même trouver d'autres limites des nombres β et γ, plus étroites que o et $\frac{1}{2}$, pourvu cependant qu'on laisse de côté les valeurs initiales β_0 et γ_0, nulles dans tous les cas. Nous allons le montrer en mettant un rapport tel que $-\frac{u_m}{u_{m-1}}$ sous forme de fraction continue. Reprenons pour cela les équations du groupe (1) en les écrivant comme ci-dessous :

$$-\frac{u_2}{u_1} = 2\left(1+\frac{a_1}{a_2}\right),$$
$$-\frac{u_3}{u_2} = 2\left(1+\frac{a_2}{a_3}\right)+\frac{a_2 u_1}{a_3 u_2},$$
$$-\frac{u_4}{u_3} = 2\left(1+\frac{a_3}{a_4}\right)+\frac{a_3 u_2}{a_4 u_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$-\frac{u_m}{u_{m-1}} = 2\left(1+\frac{a_{m-1}}{a_m}\right)+\frac{a_{m-1} u_{m-2}}{a_m u_{m-1}};$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$\frac{a_1}{a_2}=\delta_1,\quad \frac{a_2}{a_3}=\delta_2,\quad \frac{a_3}{a_4}=\delta_3,\ldots,\quad \frac{a_{m-1}}{a_m}=\delta_{m-1},\ldots.$$

ces équations deviennent

$$(4)\qquad -\frac{u_2}{u_1} = 2(1+\delta_1),$$
$$-\frac{u_3}{u_2} = 2(1+\delta_2)+\delta_2\frac{u_1}{u_2},$$
$$-\frac{u_4}{u_3} = 2(1+\delta_3)+\delta_3\frac{u_2}{u_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(5)\qquad -\frac{u_m}{u_{m-1}} = 2(1+\delta_{m-1})+\delta_{m-1}\frac{u_{m-2}}{u_{m-1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La première donne $-\frac{u_2}{u_1}$; en portant sa valeur dans la seconde, on trouve

$$-\frac{u_3}{u_2} = 2(1+\delta_2) - \frac{\delta_2}{2(1+\delta_1)},$$

expression qui substituée dans la troisième donne à son tour

$$-\frac{u_4}{u_3} = 2(1+\delta_3) - \cfrac{\delta_3}{2(1+\delta_2) - \cfrac{\delta_2}{2(1+\delta_1)}}.$$

Le même procédé de substitutions successives toujours continué conduit à la formule générale

$$(6)\quad -\frac{u_m}{u_{m-1}} = 2(1+\delta_{m-1}) - \cfrac{\delta_{m-1}}{2(1+\delta_{m-2}) - \cfrac{\delta_{m-2}}{2(1+\delta_{m-3}) - \cfrac{\delta_{m-3}}{2(1+\delta_{m-4}) - \ldots}}};$$

la fraction continue s'arrête quand on arrive au dénominateur $2(1+\delta_1)$.

Maintenant, je dis que si l'on remplace tous les rapports δ par un nombre plus grand, on augmentera $-\frac{u_m}{u_{m-1}}$. La proposition est en effet évidente pour $-\frac{u_2}{u_1}$, d'après l'équation (4); d'un autre côté, on peut voir d'après l'équation (5) que si elle est reconnue vraie pour $-\frac{u_{m-1}}{u_{m-2}}$ elle le sera aussi pour $-\frac{u_m}{u_{m-1}}$: car ce dernier rapport ne contient, comme portion variable, que $\delta_{m-1}\left(2+\frac{u_{m-2}}{u_{m-1}}\right)$, quantité dont les deux facteurs auront augmenté. Cela suffit pour justifier notre proposition; et en conséquence, l étant une limite supérieure des rapports δ, on aura

$$(7)\quad -\frac{u_m}{u_{m-1}} < 2(1+l) - \cfrac{l}{2(1+l) - \cfrac{l}{2(1+l) - \cfrac{l}{2(1+l) - \ldots}}}.$$

Il faudrait avoir soin (bien entendu) d'arrêter la suite des fractions intégrantes dès que leur nombre atteindrait celui qui existe dans la fraction

continue (6). De la dernière équation nous pouvons déduire, pour $m > 1$,

$$\beta_{m-1} > \cfrac{1}{2(1+l) - \cfrac{l}{2(1+l) - \cfrac{l}{2(1+l) - \cfrac{l}{2(1+l) - \ddots}}}},$$

en observant une règle pareille pour le nombre des fractions intégrantes $\frac{l}{2(1+l)}$. Si l'on avait mis, au lieu de l, une limite inférieure l' des nombres δ, on aurait trouvé de même

$$(8) \qquad -\frac{u_m}{u_{m-1}} > 2(1+l') - \cfrac{l'}{2(1+l') - \cfrac{l'}{2(1+l') - \cfrac{l'}{2(1+l') - \ddots}}},$$

d'où résulte également

$$\beta_{m-1} < \cfrac{1}{2(1+l') - \cfrac{l'}{2(1+l') - \cfrac{l'}{2(1+l') - \cfrac{l'}{2(1+l') - \ddots}}}}.$$

La forme des fractions continues (7) et (8) suffit pour montrer bien facilement que leurs réduites vont en diminuant; ainsi la première réduite de (7) est $2(1+l)$; la seconde est $2(1+l) - \frac{l}{2(1+l)}$; la troisième diffère de la seconde en ce que le dénominateur du terme négatif $\frac{l}{2(1+l)}$ doit être diminué, ce qui a pour effet d'augmenter sa valeur absolue, et partant de rendre plus faible le résultat final. Le même raisonnement se répéterait pour les réduites suivantes. Donc on a, pour toute valeur de m,

$$-\frac{u_m}{u_{m-1}} < 2(1+l),$$

$$-\frac{u_m}{u_{m-1}} > \text{la limite de la fraction (8) prolongée à l'infini,}$$

ou encore, en nommant z' cette limite et supposant $m > 1$,

$$\beta_{m-1} > \frac{1}{2(1+l)},$$
$$\beta_{m-1} < \frac{1}{z'}.$$

La limite z' et la limite analogue z de la fraction (7) se déterminent aisément par un procédé très-connu : on a

$$z = 2(1+l) - \frac{l}{z},$$
$$z' = 2(1+l') - \frac{l'}{z'};$$

d'où l'on tire, par la résolution d'une équation du second degré,

$$(9) \qquad z = 1 + l + \sqrt{1+l+l^2},$$
$$(10) \qquad z' = 1 + l' + \sqrt{1+l'+l'^2}.$$

Le signe — du radical est rejeté, afin de remplir la condition nécessaire

$$z > 2, \quad z' > 2.$$

La discussion qui précède nous montre, en résumé, que *si tous les rapports* $\frac{a_{m-1}}{a_m}$ *sont compris entre deux limites* l *et* l', *dont la première surpasse la seconde, tous les nombres* β *auront une limite inférieure* $\frac{1}{2(1+l)}$ *et une limite supérieure* $\frac{1}{1+l'+\sqrt{1+l'+l'^2}}$, *sauf l'exception* $\beta_0 = 0$.

Quant aux nombres γ, les mêmes résultats peuvent leur être appliqués : seulement, comme l'ordre des travées est renversé et qu'on doit considérer $\frac{a_m}{a_{m-1}}$ au lieu de $\frac{a_{m-1}}{a_m}$, la limite l devra se remplacer par $\frac{1}{l'}$ et l' par $\frac{1}{l}$.

Exemple particulier. — Supposons tous les nombres a_1, a_2, a_3,... égaux entre eux ; les équations du groupe (1) deviennent

$$4u_1 + u_2 = 0,$$
$$u_1 + 4u_2 + u_3 = 0,$$
$$u_2 + 4u_3 + u_4 = 0,$$
$$u_3 + 4u_4 + u_5 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On en tire successivement, après avoir pris $u_1 = 1$,

$$\begin{aligned} u_2 &= -4u_1 = -4, \\ u_3 &= -4u_2 - u_1 = 4.4 - 1 = 15, \\ u_4 &= -4u_3 - u_2 = -4.15 + 4 = -56, \\ u_5 &= -4u_4 - u_3 = 4.56 - 15 = 209, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, en continuant de même, on forme le tableau suivant que l'on doit arrêter dès qu'on arrive à u_n :

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6, & u_7, \\ 1, & -4, & 15, & -56, & 209, & -780, & 2911, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} u_8, & u_9, & u_{10}, & u_{11}, & u_{12}, \ldots \\ -10864, & 40545, & -151316, & 564719, & -2107560, \ldots \end{matrix}$$

Le rapport entre la valeur absolue d'un terme et celle de son précédent dépasse bien toujours la limite 2, car le calcul direct donne pour valeurs successives de ce rapport

$$\frac{4}{1}, \quad \frac{15}{4}, \quad \frac{56}{15}, \quad \frac{209}{56}, \quad \frac{780}{209}, \quad \frac{2911}{780}, \ldots,$$

soit approximativement, à 0,000005 près,

$$4, \quad 3,75, \quad 3,73333, \quad 3,73214, \quad 3,73206, \quad 3,73205, \ldots.$$

Par l'emploi de la formule (6), on reconnaît dans les fractions ci-dessus les réduites de la fraction continue périodique

$$4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \ldots}}}}.$$

Les nombres $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ auraient en conséquence l'expression inverse

$$\cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \ldots}}}},$$

d'où l'on tirerait des réduites inverses de celles qui figurent ci-dessus; ces réduites sont en fractions décimales

β_1,	β_2,	β_3,	β_4,	β_5,	$\beta_6,\ldots$,
0,25,	0,26667,	0,26786,	0,26789,	0,26795,	0,26795,....

Il faut, dans le cas actuel, faire $l = l' = 1$; on a donc

$$z = z' = 2 + \sqrt{3} = 3,73205\ldots,$$

limite vers laquelle tendent les rapports $-\frac{u_m}{u_{m-1}}$ pour $m = \infty$. De leur côté, les nombres β convergent vers la limite

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} = 0,26795\ldots;$$

ce dernier nombre est leur limite supérieure $\frac{1}{z'}$, et leur limite inférieure $\frac{1}{2(1+l)}$ prend la valeur $\frac{1}{4}$. On voit donc qu'ils varient dans un intervalle très-resserré.

La série des v ne diffère pas de celle des u, pour raison de symétrie; celle des γ coïncide pareillement avec celle des β.

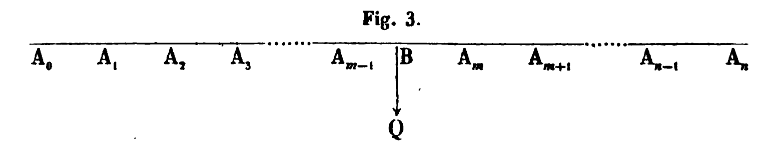
Les nombres β et γ ayant tous des valeurs comprises entre $\frac{1}{4}$ et 0,268 (sauf β_0 et γ_0), on voit que les appuis intermédiaires d'une poutre à travées égales se trouvent, sous ce point de vue, à peu près à égale distance du rôle d'appuis simples et du rôle d'encastrements complets, pour chaque travée considérée seule. Ce sont (si l'on peut s'exprimer ainsi) des *demi-encastrements*.

10. *Recherche des moments fléchissants sur les points d'appui, dans le cas où la poutre supporte une charge concentrée unique.* — Nous commençons par étudier ce cas d'une charge unique, un peu abstrait peut-être, car une poutre supporte toujours en réalité des poids répartis d'une manière continue, ne fût-ce que son poids propre; mais, suivant la remarque générale rappelée au n° 5, concernant la superposition des effets, étudier l'effet total d'un ensemble de charges

revient toujours à étudier l'effet spécial de chaque charge partielle, puisque la réunion de tous ces effets spéciaux donne l'effet définitif, du moins quand on écarte l'hypothèse d'abaissements inégaux pour les points de la poutre situés au-dessus des divers appuis.

Soit donc une poutre reposant sur une série de $(n+1)$ appuis simples, sans encastrement, $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_{n-1}, A_n$ (*fig.* 3), que nous supposerons, suivant

Fig. 3.



l'usage ordinaire, capables d'assurer la fixité des points correspondants sur la fibre moyenne primitive; un poids unique Q agit en B, dans la travée $A_{m-1}A_m$. Il faut, pour l'équilibre de la poutre, que la somme des moments de toutes les forces extérieures soit nulle relativement aux points A_0 et A_n, de sorte qu'en ces points le moment de flexion est égal à zéro; mais, sur tous les autres appuis, le moment de flexion prend des valeurs qui ne sont pas nulles et qu'il s'agit de déterminer. A cet effet, nommons :

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n-1}$ les moments demandés, chacun se rapportant à l'appui qui a même indice;

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ les ouvertures des n travées A_0A_1, A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}$, $A_{n-1}A_n$;

q et r les rapports des distances $\overline{A_{m-1}B}$, $\overline{BA_m}$ à la longueur totale de la travée $A_{m-1}A_m$, rapports dont la somme égale l'unité.

Appliquons l'équation (7) ou l'équation (8) du n° 4 successivement à tous les groupes de deux travées consécutives, en tenant compte de ce qu'on a, par hypothèse,

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0,$$

et, par définition,

$$q = 1 - r, \quad r = 1 - q;$$

nous trouverons alors les $n-1$ relations ci-après entre les

$n-1$ inconnues de la question :

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} 2X_1(a_1+a_2)+X_2a_2=0, \\ X_1a_2+2X_2(a_2+a_3)+X_3a_3=0, \\ X_2a_3+2X_3(a_3+a_4)+X_4a_4=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{m-3}a_{m-2}+2X_{m-2}(a_{m-2}+a_{m-1})+X_{m-1}a_{m-1}=0, \\ X_{m-2}a_{m-1}+2X_{m-1}(a_{m-1}+a_m)+X_ma_m=Qa_m^2qr(1+r), \\ X_{m-1}a_m+2X_m(a_m+a_{m+1})+X_{m+1}a_{m+1}=Qa_m^2qr(1+q), \\ X_ma_{m+1}+2X_{m+1}(a_{m+1}+a_{m+2})+X_{m+2}a_{m+2}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n-3}a_{n-2}+2X_{n-2}(a_{n-2}+a_{n-1})+X_{n-1}a_{n-1}=0, \\ X_{n-2}a_{n-1}+2X_{n-1}(a_{n-1}+a_n)=0. \end{array}\right.$$

En considérant à part les $m-2$ premières de ces relations, on voit qu'elles forment un groupe tout semblable au groupe (1) du n° 9 ; la $(m-1)^{ième}$ rentrerait dans la même loi, si l'on faisait abstraction du second membre. Ainsi donc, $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$ représentant la série de nombres u calculés comme on l'a dit plus haut (n° 9), on pourra poser

$$X_1=u_1X_1,\quad X_2=u_2X_1,\quad X_3=u_3X_1,\dots,\quad X_{m-1}=u_{m-1}X_1.$$

Pareillement on pourrait partir de la dernière équation (11), et en remontant jusqu'à la $(m+1)^{ième}$ inclusivement, on trouverait un groupe de même forme que le groupe (2) du n° 9, qui permettrait d'exprimer, avec autant de facilité, les moments $X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{n-2}, X_{n-1}$ par leurs rapports avec ce dernier, c'est-à-dire qu'on aurait, en employant la série déjà connue des nombres v,

$$X_{n-1}=v_1X_{n-1},\quad X_{n-2}=v_2X_{n-1},\quad X_{n-3}=v_3X_{n-1},\dots,$$
$$X_m=v_{n-m}X_{n-1}.$$

Cela posé, dans les deux équations contenant Q on remplacera tous les moments par leurs valeurs en X_1 ou X_{n-1}, et il viendra

$$X_1[u_{m-2}a_{m-1}+2u_{m-1}(a_{m-1}+a_m)]+v_{n-m}X_{n-1}a_m=Qa_m^2qr(1+r),$$
$$u_{m-1}X_1a_m+X_{n-1}[2v_{n-m}(a_m+a_{m+1})+v_{n-m-1}a_{m+1}]=Qa_m^2qr(1+q),$$

3.

ou bien, eu égard aux relations qui déterminent u_m et v_{n-m+1} dans les groupes (1) et (2) du n° 9,

$$-u_m X_1 + v_{n-m} X_{n-1} = Q a_m q r (1 + r),$$
$$u_{m-1} X_1 - v_{n-m+1} X_{n-1} = Q a_m q r (1 + q);$$

on en tire sans peine

$$(12) \qquad X_1 = Q a_m q r \frac{(1+q) v_{n-m} + (1+r) v_{n-m+1}}{u_{m-1} v_{n-m} - u_m v_{n-m+1}},$$

$$(13) \qquad X_{n-1} = Q a_m q r \frac{(1+r) u_{m-1} + (1+q) u_m}{u_{m-1} v_{n-m} - u_m v_{n-m+1}}.$$

Quand on aurait ainsi trouvé X_1 et X_{n-1}, il suffirait de les multiplier respectivement par les deux séries

$$u_2, \quad u_3, \quad u_4, \ldots, \quad u_{m-1},$$
$$v_{n-m}, \quad v_{n-m-1}, \quad v_{n-m-2}, \ldots, \quad v_2,$$

pour avoir les moments sur tous les points d'appui

$$A_2, \quad A_3, \quad A_4, \ldots, \quad A_{m-1},$$
$$A_m, \quad A_{m+1}, \quad A_{m+2}, \ldots, \quad A_{n-2},$$

autres que A_1 et A_{n-1}.

Les formules (12) et (13) sont peu commodes à écrire et même à lire, à cause des nombreux indices qui les surchargent. Afin d'en avoir d'autres qui puissent les remplacer, sans présenter les mêmes inconvénients, nous les multiplierons d'abord par u_{m-1} et v_{n-m}, ce qui donnera X_{m-1} et X_m, savoir :

$$X_{m-1} = Q a_m q r u_{m-1} \frac{(1+q) v_{n-m} + (1+r) v_{n-m+1}}{u_{m-1} v_{n-m} - u_m v_{n-m+1}},$$
$$X_m = Q a_m q r v_{n-m} \frac{(1+r) u_{m-1} + (1+q) u_m}{u_{m-1} v_{n-m} - u_m v_{n-m+1}};$$

ensuite nous ferons, suivant les notations du n° 9,

$$u_{m-1} = -\beta_{m-1} u_m,$$
$$v_{n-m} = -\gamma_{n-m} v_{n-m+1},$$

et il viendra, en supprimant le facteur commun $u_m v_{n-m+1}$,

$$X_{m-1} = Q a_m q r \beta_{m-1} \frac{1 + r - (1+q)\gamma_{n-m}}{1 - \beta_{m-1}\gamma_{n-m}},$$

$$X_m = Q a_m q r \gamma_{n-m} \frac{1 + q - (1+r)\beta_{m-1}}{1 - \beta_{m-1}\gamma_{n-m}}.$$

Maintenant observons que β_{m-1} et γ_{n-m} représentent ce que nous avons nommé plus haut le β et le γ de la travée $A_{m-1}A_m$; sous la condition de nous rappeler que les grandeurs a, β, γ sont celles qui, dans leurs séries respectives, appartiennent spécialement à la travée où agit la charge, nous pourrons donc supprimer les indices dont elles sont affectées et écrire simplement

(14) $$X_{m-1} = Q a q r \beta \frac{1 + r - (1+q)\gamma}{1 - \beta\gamma},$$

(15) $$X_m = Q a q r \gamma \frac{1 + q - (1+r)\beta}{1 - \beta\gamma}:$$

telles sont les formules auxquelles nous nous arrêterons, et que nous emploierons principalement dans les discussions ultérieures du § II. Elles permettent, aussi bien que les formules (12) et (13), de calculer les moments sur les divers points d'appui, car les termes de chacune des deux séries

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3,\ldots,\quad X_{m-1},$$
$$X_m,\quad X_{m+1},\quad X_{m+2},\ldots\quad X_{n-1},$$

ayant entre eux des rapports connus, on les connaît tous dès qu'on connaît un terme de la première et un terme de la seconde. On a, par exemple,

$$X_{m-2} = \frac{u_{m-2}}{u_{m-1}} X_{m-1} = -\beta_{m-2} X_{m-1},$$

$$X_{m-3} = \frac{u_{m-3}}{u_{m-2}} X_{m-2} = -\beta_{m-3} X_{m-2} = \beta_{m-2}\beta_{m-3} X_{m-1},$$

et ainsi de suite; on trouverait l'expression générale

(16) $$X_{m-k} = \pm \beta_{m-2}\beta_{m-3}\beta_{m-4}\ldots\beta_{m-k} X_{m-1},$$

applicable à tous les appuis qui précèdent A_{m-1}; le signe est + quand il y a un nombre pair de facteurs β, — dans le cas contraire. Pour les appuis au delà de A_m on aurait pareillement la formule

$$(17)\qquad X_{m+k} = \pm \gamma_{n-m-1}\gamma_{n-m-2}\ldots\gamma_{n-m-k}X_m.$$

L'analyse ci-dessus doit se modifier légèrement pour le cas où la charge porte sur l'une des travées extrêmes, soit par exemple la première. Alors Q ne figurera plus que dans la première équation (11), et toutes les suivantes étant privées de second membre, on pourra faire dans celle-là

$$X_1 = v_{n-1}X_{n-1},\quad X_2 = v_{n-2}X_{n-1};$$

en représentant par qa_1, ra_1 les distances de la force Q aux appuis A_0, A_1, on trouvera de cette manière

$$X_{n-1}[2v_{n-1}(a_1 + a_2) + v_{n-2}a_2] = Qa_1^2qr(1+q),$$

ou bien, si l'on a égard à la dernière équation (2) du n° 9,

$$X_{n-1} = -\frac{1}{v_n}Qa_1qr(1+q).$$

Ce moment multiplié par

$$v_2,\quad v_3,\quad v_4,\ldots,\quad v_{n-2},\quad v_{n-1}$$

donnerait la valeur des autres inconnues

$$X_{n-2},\quad X_{n-3},\quad X_{n-4},\ \ldots,\quad X_2,\quad X_1.$$

Le moment X_1 en particulier serait

$$(18)\qquad X_1 = -\frac{v_{n-1}}{v_n}Qa_1qr(1+q) = \gamma_{n-1}Qa_1qr(1+q);$$

c'est ce qu'on aurait obtenu de suite si l'on avait fait $\beta=\beta_0=0$, dans la formule (15); la formule (14) aurait d'ailleurs donné $X_0 = 0$, ce qui a lieu en effet. Connaissant X_1, la formule (17) donnerait X_2, X_3, $X_4,\ldots$, en y supposant $m=1$.

Nous sommes maintenant en mesure de justifier ce qui a été avancé au n° 9, savoir, que si β_{m-1} est nul, l'appui A_{m-1} joue, pour la travée $A_{m-1}A_m$,

le rôle d'un simple appui d'extrémité, sauf une exception relative à la position de la charge. Il suffit de montrer que l'égalité $\beta_{m-1} = o$ entraîne généralement $X_{m-1} = o$, car c'est bien la propriété caractéristique d'un appui extrême, de fournir, par l'ensemble de ses réactions, un moment fléchissant toujours nul ; il faut en outre indiquer le cas exceptionnel où β_{m-1} sera nul, sans que X_{m-1} le soit. Or supposons la charge dans la travée $A_{m-1}A_m$, puis à droite de l'appui A_m, puis à gauche de A_{m-2} : je dis qu'on aura dans ces trois cas $X_{m-1} = o$ pour $\beta_{m-1} = o$.

En effet, la formule (14) contient le facteur β (ou β_{m-1}), et par conséquent X_{m-1} s'annule avec β_{m-1} quand la charge porte sur $A_{m-1}A_m$: c'est le premier des trois cas. Si la charge se trouve à droite de A_m, la formule (16) devient applicable à A_{m-1}, et β_{m-1} figure alors parmi les facteurs β du second membre : donc, dans le second cas, le moment de flexion est nul, non-seulement en A_{m-1}, mais aussi sur tous les appuis à gauche de ce point. Quant au troisième cas, il n'y a pour ainsi dire pas besoin de nouveaux raisonnements : en effet, la condition nécessaire et suffisante pour annuler β_{m-1}, c'est que la travée $A_{m-1}A_{m-2}$ soit infinie (n° 9); alors tous les moments fléchissants s'annulent en A_{m-1} et sur la gauche, quand la charge est à droite : donc aussi, en permutant la droite avec la gauche (ce qui revient à changer seulement la position du spectateur relativement à la poutre), les moments de flexion s'annuleront en A_{m-2} et sur toute la partie droite comprenant A_{m-1}, quand on mettra la charge à gauche de A_{m-2}.

Le cas d'exception annoncé plus haut est celui où la charge est sur la travée $A_{m-1}A_{m-2}$; cette travée ayant une longueur infinie relativement à ses voisines (*), celles-ci devraient être considérées comme nulles relativement à la première, pour laquelle A_{m-1} et A_{m-2} deviendraient alors des encastrements. Par conséquent, on n'aurait pas $X_{m-1} = o$. La condition $\beta_{m-1} = o$ n'est donc pas absolument suffisante pour réduire toujours A_{m-1} au rôle d'appui simple, à l'égard de la travée $A_{m-1}A_m$: mais elle le serait certainement si la charge ne sortait pas de cette travée, puisqu'il suffit qu'on charge toute autre travée que $A_{m-2}A_{m-1}$.

Quand on suppose, dans les formules (14) et (15), β et γ égaux à l'une de leurs limites o et $\frac{1}{2}$, on retrouve toutes les formules applicables au cas d'une travée unique, soit simplement appuyée, soit encastrée à ses deux extrémités, soit appuyée à l'une et encastrée à l'autre, et chargée d'un poids concentré, dans l'intervalle. Si par exemple on supposait un

(*) Afin de ne pas entrer dans des détails trop minutieux sur des hypothèses non rigoureusement réalisables, on exclut ici le cas de plusieurs travées infinies.

encastrement aux deux extrémités, on ferait $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, et il viendrait

$$X_{m-1} = \frac{2}{3} Qaqr \left[1 + r - \frac{1}{2}(1+q) \right] = \frac{1}{3} Qaqr(1 + 2r - q),$$
$$X_m = \frac{2}{3} Qaqr \left[1 + q - \frac{1}{2}(1+r) \right] = \frac{1}{3} Qaqr(1 + 2q - r),$$

ou bien, attendu qu'on a $q + r = 1$,

$$X_{m-1} = Qaqr^2,$$
$$X_m = Qaq^2 r.$$

Ainsi l'on voit que la théorie des poutres à plusieurs travées comprend comme cas particulier celle des poutres à une seule travée.

Jusqu'à présent nous ne nous sommes occupé que des moments de flexion au-dessus des appuis; avant de les chercher pour un point quelconque, il faut encore en avoir la valeur au point B où la force Q est appliquée.

11. *Moment fléchissant au point d'application même de la charge.* — Le moment fléchissant au point B (*fig.* 3) s'obtient facilement quand on a calculé X_{m-1} et X_m; il suffit pour cela d'appliquer la formule (4) du n° 1. Les x étant comptés à partir de A_{m-1} et a désignant la longueur $\overline{A_{m-1}A_m}$, on aura, pour le point B,

$$x = qa, \quad \varphi(x) = -Qaq(1-q) = -Qaqr;$$

donc le moment X′ dont il s'agit sera

$$(19) \quad X' = X_{m-1} + q(X_m - X_{m-1}) - Qaqr = rX_{m-1} + qX_m - Qaqr.$$

Si l'on pose

$$X_{m-1} = \xi Qaqr, \quad X_m = \xi_1 Qaqr, \quad X' = \xi' Qaqr,$$

les rapports ξ et ξ_1 auront pour valeurs, d'après les formules (14) et (15),

$$\xi = \beta \frac{1 + r - (1+q)\gamma}{1 - \beta\gamma},$$
$$\xi_1 = \gamma \frac{1 + q - (1+r)\beta}{1 - \beta\gamma},$$

et la formule (19) donnera

$$\xi' = r\xi + q\xi_1 - 1. \tag{20}$$

12. *Signes des moments* X_{n-1}, X_n, X'. — Les nombres β et γ étant positifs et plus petits que $\frac{1}{2}$, les rapports ci-dessus désignés par ξ et ξ_1 ont respectivement le signe de $1+r-(1+q)\gamma$ et de $1+q-(1+r)\beta$; or q et r n'atteignent pas l'unité, de façon que $(1+q)\gamma$ et $(1+r)\beta$ sont aussi <1, et *à fortiori* moindres que $1+r$ et $1+q$. Donc ξ et ξ_1 ne peuvent qu'être positifs; donc aussi :

Une charge isolée produit toujours des moments fléchissants positifs (*) *sur les appuis extrêmes de la travée qui la supporte.*

Ce théorème s'étend immédiatement au cas d'une charge composée d'un nombre quelconque de charges isolées, en vertu du principe de la superposition des effets rappelé au n° 5. Puisque chaque force élémentaire placée dans l'intervalle $A_{n-1}A_n$ donne lieu à un moment positif, soit en A_{n-1}, soit en A_n, l'ensemble de toutes ces forces produira, en l'un ou l'autre de ces points, un moment qui sera la somme de quantités positives, et partant lui-même positif.

Maintenant je dis que ξ' et X' sont, au contraire, toujours négatifs. Ces deux quantités ont évidemment même signe, et pour établir que ξ' a le signe —, il suffit d'établir qu'on a

$$\xi < 1, \quad \xi_1 < 1,$$

car alors $r\xi + q\xi_1$, qui se trouve nécessairement compris entre ξ et ξ_1, sera lui-même <1, et la formule (20) donnera ξ' négatif. Or l'inégalité $\xi < 1$ revient à

$$\beta(1+r) - (1+q)\beta\gamma < 1 - \beta\gamma,$$

ou, en réduisant, à

$$\beta(1+r) < 1 + q\beta\gamma,$$

(*) Le sens considéré comme positif est ici (aussi bien que dans les autres parties de cet ouvrage) celui qu'on a défini au n° 1 : quand, pour avoir le moment fléchissant relatif à un point, on calcule la somme des moments des forces comprises entre ce point et l'une des deux extrémités de la pièce, on prendra positivement le moment des forces verticales descendantes.

inégalité évidente, car on a déjà remarqué que $\beta(1+r)$ n'atteint pas l'unité, tandis que le second membre la dépasse. La même démonstration s'appliquant à ξ_1, il en résulte donc que ξ' et X' sont négatifs. Donc :

Une charge isolée produit toujours un moment fléchissant négatif en son propre point d'application.

13. *Représentation graphique des moments produits par une charge isolée.* — La *fig.* 4 (*Pl. A*, à la fin du volume) est destinée à rendre sensible aux yeux les résultats déjà obtenus dans les numéros précédents, ainsi que la loi des moments de flexion en tout point d'une poutre soumise à l'action d'une charge concentrée unique. Soit, comme ci-dessus, $A_{m-1}A_m$ la travée chargée, supportant la force Q placée en B; sur l'horizontale $A_{m-1}A_m$ prolongée, marquons les divers appuis, savoir :

A_{m-1}, A_{m-2}, A_{m-3}, A_{m-4}, ..., à gauche de la travée en question,
A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, A_{m+3}, ..., à droite.

En A_{m-1} et A_m élevons deux ordonnées positives $\overline{A_{m-1}E}$, $\overline{A_mG}$, représentant les grandeurs de X_{m-1} et X_m, et en B une ordonnée négative $\overline{BF}$ représentant X' (nº 12). Si l'on imagine que le moment relatif à un point quelconque soit pareillement représenté par une ordonnée, en dessus ou en dessous de la fibre moyenne (suivant le signe), il y aura sur la première série d'appuis, à gauche de la travée chargée, des moments

$$X_{m-1}, \quad X_{m-2}, \quad X_{m-3}, \quad X_{m-4}, \ldots,$$

respectivement proportionnels (nº 10) à la série

$$u_{m-1}, \quad u_{m-2}, \quad u_{m-3}, \quad u_{m-4}, \ldots;$$

ils se déduiront donc tous du premier X_{m-1} ou $\overline{A_{m-1}E}$, qu'on aura calculé par la formule (15); de plus, ils seront alternativement positifs et négatifs, et leurs valeurs absolues décroîtront plus rapidement qu'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. La même chose existera sur la partie de la poutre qui est située à droite de A_m, les moments

$$X_m, \quad X_{m+1}, \quad X_{m+2}, \quad X_{m+3}, \ldots,$$

étant proportionnels aux termes de la série

$$v_{n-m},\quad v_{n-m-1},\quad v_{n-m-2},\quad v_{n-m-3},\ldots.$$

Maintenant, après avoir ainsi déterminé toutes les ordonnées relatives aux appuis ainsi qu'au point B, et les avoir reportées sur la figure, qu'on joigne deux à deux par des lignes droites leurs extrémités consécutives, on construira de cette manière le polygone ...USPEFGILN..., dont les ordonnées représenteront le moment de flexion en chaque point de la poutre. C'est en effet une propriété bien connue que, dans une pièce droite soumise à des forces transversales discontinues, le moment de flexion est une fonction linéaire de l'abscisse, dont la forme reste constante dans l'intervalle de deux forces consécutives, en comptant, bien entendu, parmi ces forces les réactions des appuis. Cette propriété se retrouverait, au besoin, par la formule (4) du n° 1, car dans les travées vides la fonction $\varphi(x)$ s'annule, et dans la travée chargée $\varphi(x)$ a deux formes différentes, toutes deux linéaires, l'une applicable à la portion $A_{m-1}B$, l'autre à la portion A_mB.

La simple considération de la *fig.* 4 donne lieu à quelques remarques qui ne sont point sans intérêt. Faisons d'abord observer que si la charge Q se déplace uniquement entre les appuis A_{m-1}, A_m, les ordonnées sur les appuis situés, d'une part à gauche, d'autre part à droite, forment deux séries dans chacune desquelles la grandeur absolue des termes varie avec la position du point B, mais les signes ainsi que les rapports mutuels de ces termes restent constants. Toutes les ordonnées de la portion EPSU... et celles de la portion GILN... sont donc multipliées chacune par un rapport déterminé et positif; d'où il résulte immédiatement que les points ...T, R, O, H, K, M,..., demeurent immobiles, et aussi que *le signe du moment de flexion en un point quelconque reste toujours le même pendant que la charge se déplace dans une même travée, hors de celle où ce point se trouve situé.*

Si la charge vient à passer de la travée $A_{m-1}A_m$ dans la suivante A_mA_{m+1}, l'ordonnée en A_m reste encore positive, car elle devient l'analogue de ce qu'était d'abord $\overline{A_{m-1}E}$; mais le rapport des ordonnées aux extrémités de la travée $A_{m-1}A_m$, main-

tenant vide, étant $\frac{u_{m-1}}{u_m}$, c'est-à-dire négatif, l'ordonnée en A_{m-1} a dû devenir négative; d'ailleurs, les mêmes rapports se sont conservés entre les ordonnées sur les appuis à gauche de A_{m-1}, et les points O, R, T,... n'ont pas changé : donc *le signe du moment de flexion en un point quelconque change à chaque fois que la charge, en se déplaçant toujours du même côté de la travée qui contient ce point, vient à franchir un appui; et par conséquent il se conserve ou se modifie suivant que le nombre des appuis traversés est pair ou impair.*

On vient de reconnaître que les intersections O, R, T,... du polygone représentatif avec l'axe des abscisses restaient les mêmes quand la charge parcourt toute la partie de poutre prise à droite de A_{m-1}. Ainsi, dans une travée donnée, le point analogue à O est unique, tant que la charge varie en position, en dehors et d'un même côté de cette travée, de sorte que toutes les droites représentatives, telles que EP, forment un faisceau concourant dont le sommet se trouve sur la fibre moyenne. Mais il est bon de remarquer que ce sommet change dans la même travée, et qu'on obtient un autre faisceau de droites représentatives, quand la charge se déplace de l'autre côté de cette travée et toujours en dehors. En effet, B étant pris à droite de A_{m-1}, nous avions

$$-\frac{\overline{A_{m-1}E}}{\overline{A_{m-2}P}}=\frac{u_{m-1}}{u_{m-2}},$$

tandis qu'en le prenant à gauche nous aurons

$$-\frac{\overline{A_{m-1}E}}{\overline{A_{m-2}P}}=\frac{v_{n-m+1}}{v_{n-m+2}},$$

rapport encore constant, mais différent du premier, qui assignera au point de rencontre de PE avec l'axe une situation différente.

Si l'on voulait calculer la distance $\overline{A_{m-2}O}$, il faudrait poser la proportion

$$\overline{A_{m-2}O} : \overline{A_{m-1}O} :: \overline{A_{m-2}P} : \overline{A_{m-1}E} :: u_{m-2} : -u_{m-1},$$

d'où, *componendo*,

$$\overline{A_{m-2}O} : \overline{A_{m-2}A_{m-1}} :: u_{m-2} : u_{m-2} - u_{m-1},$$

et par suite

$$\overline{A_{m-2}O} = \overline{A_{m-2}A_{m-1}} \frac{u_{m-2}}{u_{m-2} - u_{m-1}}.$$

Le rapport $-\frac{u_{m-2}}{u_{m-1}}$ n'est autre chose, pour la travée $A_{m-2}A_{m-1}$, que celui qu'on a désigné en général par β (n° 10); la fraction $\frac{u_{m-2}}{u_{m-2} - u_{m-1}}$ est donc $\frac{\beta}{1+\beta}$, et comme β ne dépasse pas $\frac{1}{2}$, elle ne dépasse pas $\frac{1}{3}$. Le point O se trouve, comme on voit, dans le premier tiers de la travée, à gauche si la charge se meut à droite. Quand on la fait mouvoir à gauche, il est bien évident qu'il faut substituer γ à β, et le sommet du second faisceau se trouve alors dans le premier tiers vers la droite.

On remarquera enfin, vu la décroissance rapide des ordonnées, des deux côtés de $A_{m-1}A_m$, qu'une charge Q peut produire des moments de flexion plus ou moins sensibles dans sa travée et dans les deux travées adjacentes; au delà les moments deviennent relativement petits et tendent à s'effacer de plus en plus, à mesure qu'on s'éloigne davantage de la charge.

14. *Observation sur le signe du moment fléchissant aux divers points de la travée qui porte la charge.* — Nous avons étudié ci-dessus (n° 13) les changements de signe qu'éprouve le moment de flexion en un point quelconque, pour toute position de la charge Q en dehors de la travée qui le contient; il s'agit d'examiner maintenant le cas où la charge et le point seraient tous deux dans une même travée $A_{m-1}A_m$ (*fig.* 4).

On sait déjà (n° 12) que les ordonnées $\overline{A_{m-1}E}$ et $\overline{A_mG}$ sont nécessairement positives, tandis que $\overline{BF}$ représente un moment toujours négatif; ainsi, la charge étant en B, on aura des moments positifs en des points suffisamment voisins des appuis, dans les portions $A_{m-1}C$, A_mD, et des moments négatifs dans le restant de la travée, entre C et D. Mais ce qui est

intéressant à connaître, c'est qu'il y a pour chacune des longueurs $\overline{A_{m-1}C}$ et $\overline{A_mD}$ une limite supérieure; que la somme des deux limites n'atteint pas la longueur totale $\overline{A_{m-1}A_m}$; que, par conséquent, les moments de flexion resteront forcément négatifs dans une certaine région centrale où ne pourront entrer les points C et D, quelque position qu'on fasse prendre à la charge, dans l'intervalle des appuis A_{m-1}, A_m. C'est ce que nous allons établir.

Pour déterminer C, on a la proportion

$$\overline{A_{m-1}C} : \overline{A_{m-1}B} :: \overline{A_{m-1}E} : \overline{A_{m-1}E} + \overline{BF}$$

que donne la considération des triangles semblables ECA_{m-1}, FCB; en posant $\overline{A_{m-1}C} = s.\overline{A_{m-1}A_m}$ et conservant les notations des nos 10 et suivants, elle devient

$$s : q :: \xi : \xi - \xi',$$

d'où résulte

$$s = \frac{q\xi}{\xi - \xi'},$$

soit, d'après la valeur (20) de ξ' (n° 11),

$$s = \frac{q\xi}{1 + q(\xi - \xi_1)}. \tag{21}$$

La différentiation de cette équation relativement à q donne

$$\left\{\begin{aligned} [1 + q(\xi - \xi_1)]^2 \frac{ds}{dq} &= [1 + q(\xi - \xi_1)]\left(\xi + q\frac{d\xi}{dq}\right) \\ &\quad - q\xi\left(\xi - \xi_1 + q\frac{d\xi}{dq} - q\frac{d\xi_1}{dq}\right) \\ &= \xi + q\frac{d\xi}{dq} + q^2\left(\xi\frac{d\xi_1}{dq} - \xi_1\frac{d\xi}{dq}\right). \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Les valeurs de ξ et ξ_1 sont (n° 11)

$$\xi = \frac{\beta}{1 - \beta\gamma}[1 + r - \gamma(1 + q)],$$

$$\xi_1 = \frac{\gamma}{1 - \beta\gamma}[1 + q - \beta(1 + r)];$$

on peut les différentier par rapport à q, en observant que β et γ ne dépendent pas de cette variable, et que r lui est lié par la relation

$$q+r=1$$

qui donne

$$\frac{dr}{dq}=-1;$$

il vient alors

$$\frac{d\xi}{dq}=-\frac{\beta(1+\gamma)}{1-\beta\gamma},$$

$$\frac{d\xi_1}{dq}=\frac{\gamma(1+\beta)}{1-\beta\gamma}.$$

Substituant, dans l'équation (22), ces expressions de ξ, ξ_1, $\frac{d\xi}{dq}$, $\frac{d\xi_1}{dq}$, nous trouvons

$$[1+q(\xi-\xi_1)]^2\frac{ds}{dq}=\frac{\beta}{1-\beta\gamma}[1+r-\gamma(1+q)-q(1+\gamma)]$$

$$+\frac{q^2\beta\gamma}{(1-\beta\gamma)^2}\{(1+\beta)[1+r-\gamma(1+q)]+(1+\gamma)[1+q-\beta(1+r]\},$$

soit, après réduction et remplacement de r par $1-q$,

$$[1+q(\xi-\xi_1)]^2\frac{ds}{dq}=\frac{\beta}{1-\beta\gamma}(2-2q-\gamma-2q\gamma)+\frac{3q^2\beta\gamma}{1-\beta\gamma}$$

$$=\frac{\beta}{1-\beta\gamma}[2(1-q)+\gamma(3q^2-2q-1)]$$

$$=\frac{\beta(1-q)}{1-\beta\gamma}[2-\gamma(1+3q)].$$

Or $\frac{ds}{dq}$ se trouve affecté, dans le premier membre, d'un facteur essentiellement positif; β, $1-q$ et $1-\beta\gamma$ sont également positifs, puisqu'on a

$$q<1,\quad \beta \text{ ou } \gamma>0,\quad \beta \text{ ou } \gamma<\frac{1}{2};$$

il en est de même de $2-\gamma(1+3q)$, car γ étant au-dessous de $\frac{1}{2}$ et $1+3q$ au-dessous de 4, $\gamma(1+3q)$ ne peut atteindre 2;

donc $\frac{ds}{dq}$ est toujours positif pendant que q varie de o à 1. Pour $q = 0$, l'équation (21) montre que s est nul; en faisant croître q, s croîtra aussi, c'est-à-dire que le point C s'éloignera de plus en plus de l'appui A_{m-1} avec lequel il coïncidait d'abord; pour $s = 1$, ce point sera à son maximum de distance $s_1.\overline{A_{m-1}A_m}$ de A_{m-1}.

On calculera ce maximum s_1 de s en faisant d'abord $q = 1$ dans ξ et ξ_1, qui prennent les valeurs correspondantes

$$\frac{\beta(1-2\gamma)}{1-\beta\gamma}, \quad \frac{\gamma(2-\beta)}{1-\beta\gamma};$$

puis on substituera ces valeurs, en même temps que $q = 1$, dans l'équation (21), et l'on aura

$$s_1 = \frac{\beta(1-2\gamma)}{1-\beta\gamma+\beta(1-2\gamma)-\gamma(2-\beta)} = \frac{\beta(1-2\gamma)}{1-2\gamma+\beta-2\beta\gamma},$$

soit, en supprimant le facteur commun $1-2\gamma$,

$$s_1 = \frac{\beta}{1+\beta}.$$

Nous reconnaissons ici une expression que nous avons déjà rencontrée au n° 13 : si le point B en se déplaçant arrivait à franchir l'appui A_m, les droites représentatives qui se substitueraient à EF passeraient toutes par un même point, désormais indépendant de la position de B, et la distance de ce point de concours à A_{m-1} aurait avec la longueur $\overline{A_{m-1}A_m}$ un rapport précisément égal à s_1. Ce point de concours coïncide donc avec la position limite de l'intersection C. En d'autres termes, si q varie de o à 1, l'intersection C part de A_{m-1} et s'écarte de cet appui jusqu'à la distance maximum $\frac{\beta.\overline{A_{m-1}A_m}}{1+\beta}$; puis elle se fixe à cette position extrême quand la charge parcourt toute l'étendue des travées au delà de A_m, ce qui répondrait, si l'on veut, à des valeurs de q plus grandes que l'unité.

On aurait pu raisonner de même sur l'intersection D; il aurait suffi de permuter, dans les calculs ci-dessus, q avec r, ξ

avec ξ_1, β avec γ. On serait arrivé à reconnaître que la distance de D à l'appui A_m ne peut varier que de o à la limite supérieure $\frac{\gamma . \overline{A_{m-1} A_m}}{1+\gamma}$.

Les deux fractions $\frac{\beta}{1+\beta}$, $\frac{\gamma}{1+\gamma}$ étant plus petites que $\frac{1}{3}$, C et D ne peuvent pénétrer dans le tiers moyen de la travée; il y a donc là une région centrale ayant au moins pour longueur $\frac{1}{3}\overline{A_{m-1} A_m}$, dans laquelle les moments de flexion conserveront toujours le signe —, tant que la force ne sortira pas de la travée. Il arrivera même dans les cas usuels que la région centrale occupera une longueur plus grande; ainsi, quand les travées seront égales, β et γ s'écarteront peu de $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ (n° 9); on aura donc approximativement

$$\frac{\beta}{1+\beta}=\frac{\gamma}{1+\gamma}=\frac{1}{3+\sqrt{3}}=0,2113,$$

et la région centrale occuperait une fraction $1-\frac{2}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\text{soit un peu moins de } \frac{7}{12}\right)$ de la travée.

En A_{m-1} et A_m, les moments que produit la charge Q placée dans l'intervalle sont toujours positifs; mais en tout autre point de la travée, si rapproché qu'on le suppose de l'un des appuis, le moment peut devenir négatif, et il le serait notamment en y plaçant la charge. On n'est donc certain *à priori* des signes qui affectent les moments de flexion produits par Q aux divers points de sa travée, que pour les extrémités et la région centrale dont on vient de parler.

Étant donné un point quelconque C, dans l'intervalle $A_{m-1}A_m$, on peut se demander où il faut placer la charge Q, dans ce même intervalle, pour qu'elle produise en C un moment fléchissant de signe déterminé, par exemple positif. La réponse à cette question est facile : en désignant par s le rapport $\frac{\overline{A_{m-1} C}}{\overline{A_{m-1} A_m}}$, qui est connu puisqu'on donne le point C, on ré-

soudrait l'équation (21) par rapport à q, après y avoir mis au lieu de r, ξ, ξ_1 leurs valeurs en fonction de q. On saurait ainsi où l'on doit placer Q pour que l'intersection de la droite EF avec l'axe des abscisses ait lieu en un point donné C. Maintenant, puisque ce point d'intersection s'éloigne de A_{m-1} en même temps que Q, il est clair qu'en éloignant Q on rendrait positif le moment de flexion au point C et qu'on aurait l'effet inverse en mettant Q plus près de A_{m-1}. On constate d'ailleurs aisément que l'équation à résoudre est du second degré : sa résolution numérique serait donc toujours fort simple, mais en la traitant algébriquement nous n'avons trouvé aucun résultat remarquable. Nous n'entrerons donc pas dans plus de détails à ce sujet.

15. *Cas particulier d'une travée extrême.* — A partir du n° **11** inclusivement, nous avons toujours raisonné dans l'hypothèse où l'indice m serait quelconque : voyons maintenant comment les résultats se modifieraient pour s'adapter au cas de $m = 1$, l'appui A_{m-1} se confondant avec l'extrémité A_0.

On sait déjà (n° **10**) que, la charge étant mise sur la première travée, il faut faire $\beta = 0$, $\gamma = -\frac{v_{n-1}}{v_n}$, dans les formules qui donnent X_{m-1} et X_m, soit X_0 et X_1; on a ainsi

$$X_0 = 0, \quad X_1 = \gamma Q a q r (1 + q),$$

et, en répétant les calculs du n° **11**, il vient

$$X' = q X_1 - Q a q r,$$
$$\xi = 0, \quad \xi_1 = \gamma (1 + q),$$
$$\xi' = q \xi_1 - 1 = \gamma q (1 + q) - 1.$$

Ainsi donc X_0 est toujours nul (et il le serait même en plaçant la charge en un point quelconque hors de la première travée); X_1 est positif; au contraire ξ' et X' sont négatifs, car on a

$$q < 1, \quad 1 + q < 2, \quad \gamma < \frac{1}{2},$$

et par conséquent

$$\gamma q (1 + q) < 1.$$

On retrouve donc ce qui a été démontré au n° **12**, sauf que X_{m-1} devient toujours nul au lieu d'être positif.

Maintenant, si l'on construit la figure analogue à la *fig.* 4, il

faudra supprimer toute la portion à gauche de A_{m-1}, et faire $\overline{A_{m-1}E} = 0$; les points E et C se confondront avec A_{m-1}, et la droite ECF partira de ce dernier point : rien ne sera d'ailleurs changé.

Quand on fera varier la position de la charge hors de la travée A_0A_1, ce qui a été dit (n° 13) sur les changements de signe du moment en un point déterminé pris dans cette travée s'applique toujours; seulement, les droites représentatives, au lieu de former deux faisceaux concourants, n'en forment plus qu'un seul, attendu qu'elles doivent toutes passer en A_0. L'un des deux faisceaux qui existaient primitivement a ce point pour sommet, puisque $\frac{\beta}{1+\beta}$ s'annule avec β; l'autre n'existe plus, parce qu'il répondait à une charge variable dans des travées supprimées, savoir : celles dont l'indice n'est pas supérieur à $m-1$.

Il ne nous reste plus qu'à chercher les limites de la région où les moments de la travée A_0A_1 sont forcément négatifs, quand la charge va de A_0 à A_1. Nous avons dit tout à l'heure que le point C (*fig.* 4) coïncide avec A_{m-1} ou A_0; les moments sont donc négatifs depuis ce point jusqu'à D, et tout se réduit à chercher le maximum de distance entre ce dernier point et A_m ou A_1. Or, un calcul de triangles semblables, tout pareil à celui par lequel nous avons démontré la formule (21), donnerait pour le rapport t de la distance $\overline{A_mD}$ à la longueur totale de la travée

$$t = \frac{r\xi_1}{1 + r(\xi_1 - \xi)},$$

expression composée avec r, ξ_1 et ξ comme le second membre de (21) l'est avec q, ξ et ξ_1. Il faut d'ailleurs faire $\xi = 0$, d'où résulte

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{1}{r\xi_1} = 1 + \frac{1}{r\gamma(1+q)} = 1 + \frac{1}{\gamma(1-q^2)}.$$

Lorsqu'on fait varier q de 0 à 1, $\frac{1}{t}$ varie donc de $1 + \frac{1}{\gamma}$ à ∞; le

minimum de $\frac{1}{t}$ est donc

$$\frac{1}{t_1} = 1 + \frac{1}{\gamma} = \frac{1+\gamma}{\gamma},$$

et par conséquent le maximum t_1 de t a pour valeur

$$t_1 = \frac{\gamma}{1+\gamma}.$$

C'est ce qu'on avait déjà trouvé dans le cas général. Les deux limites de la région centrale des moments négatifs dans la travée A_0A_1 ne sont donc modifiées que du côté de l'extrémité A_0 de la poutre; de l'autre côté, la limite se calcule comme dans le cas d'une travée de rang quelconque, tandis que du côté de A_0 la région centrale s'allonge jusqu'à l'appui.

En résumé, on voit qu'on peut appliquer aux travées extrêmes tout ce qui a été fait et dit pour les autres; seulement il faut tenir compte de ce qu'on a

$$\beta = 0 \quad \text{pour} \quad A_0A_1,$$
$$\gamma = 0 \quad \text{pour} \quad A_{n-1}A_n,$$

et de ce que la charge ne peut varier en position que d'un seul côté de la travée.

16. *Des plus grands moments de flexion que puisse produire une charge concentrée.* — Une charge Q étant placée dans la travée $A_{m-1}A_m$ et concentrée au point B (*fig.* 4), produit aux divers points de la pièce des moments représentés par la ligne polygonale ... USPEFGILN...; il est visible, par la figure même, que ces moments pris en valeur absolue passent par une série de maxima répondant aux points d'appui et au point B. Ces maxima sont les ordonnées

$$\overline{A_{m-1}E},\quad \overline{A_{m-2}P},\quad \overline{A_{m-3}S},\ \ldots,$$
$$\overline{A_mG},\quad \overline{A_{m+1}I},\quad \overline{A_{m+2}L},\ \ldots.$$

et enfin $\overline{BF}$. D'ailleurs $\overline{A_{m-1}E}$ surpasse toutes les ordonnées à gauche de A_{m-1}, et $\overline{A_mG}$ celles qui sont à droite de A_m (n° 13) : le maximum absolu est donc l'une des trois lignes $\overline{A_{m-1}E}$, $\overline{A_mG}$, $\overline{BF}$. Si l'on désigne par A, B, C leurs rapports respectifs au produit Qa_m ou Qa, on aura d'abord

(nº 10) :

$$A = qr\beta \frac{1 + r - (1 + q)\gamma}{1 - \beta\gamma},$$

$$B = qr\gamma \frac{1 + q - (1 + r)\beta}{1 - \beta\gamma};$$

et ensuite (nº 11) :

$$C = -\frac{X'}{Qa} = -qr\xi' = qr(1 - r\xi - q\xi_1),$$

ou bien, en remplaçant ξ et ξ_1 par leurs valeurs et réduisant, eu égard à la relation $q + r = 1$,

$$C = \frac{qr}{1 - \beta\gamma}[1 - \beta r(1 + r) - \gamma q(1 + q) + 2qr\beta\gamma].$$

Nous nous proposons d'examiner ici comment varient ces trois coefficients A, B, C, proportionnels aux plus grands moments produits par la charge Q, dans une position donnée, et surtout de signaler les maxima qu'ils peuvent atteindre :

1º Quand une poutre est définie complétement, ce qui entraîne des valeurs fixes pour β et γ, mais qu'on fait varier la position de la charge dans sa travée, c'est-à-dire les nombres q et r, entre leurs limites respectives o et 1, 1 et o;

2º Quand la disposition des appuis à droite et à gauche de la travée chargée est censée indéterminée, ce qui permet de faire varier aussi β et γ entre les limites extrêmes o et $\frac{1}{2}$ dont la signification a été indiquée (nºˢ 9 et 10).

Maxima des coefficients A *et* B. — Quand q et r varient seuls, A varie proportionnellement à

$$qr(1 + r) - (1 + q)qr\gamma$$

ou bien à

$$q(1 - q)(2 - q) - \gamma q(1 - q^2).$$

Désignons cette expression par y et prenons sa dérivée relativement à q; nous aurons

$$\frac{dy}{dq} = 2 - 6q + 3q^2 - \gamma(1 - 3q^2).$$

La dérivée $\frac{dy}{dq}$ devient, pour $q = 0$, égale à $2 - \gamma$, valeur positive; pour $q = 1$, elle prend la valeur négative $2\gamma - 1$; la fonction d'abord croissante avec q finit par devenir décroissante. Dans l'intervalle elle passe

par un maximum répondant à

$$\frac{dy}{dq} = 0,$$

équation du second degré qui donne

$$q = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{3}(1 - \gamma + \gamma^2)}}{1 + \gamma};$$

nous n'écrivons pas le signe + du radical qui rendrait la valeur de q supérieure à 1, comme il est facile de s'en assurer. Pour substituer cette expression dans y, on formera les facteurs

$$2 - q - \gamma(1 + q) = \frac{1}{1+\gamma}\left\{2(1+\gamma) - 1 + \sqrt{\frac{1}{3}(1 - \gamma + \gamma^2)} - \gamma\left[1 + \gamma + 1 - \sqrt{\frac{1}{3}(1 - \gamma + \gamma^2)}\right]\right\}$$

$$= 1 - \gamma + \sqrt{\frac{1}{3}(1 - \gamma + \gamma^2)},$$

$$q(1 - q) = \frac{1}{(1+\gamma)^2}\left[1 - \sqrt{\frac{1}{3}(1 - \gamma + \gamma^2)}\right]\left[\gamma + \sqrt{\frac{1}{3}(1 - \gamma + \gamma^2)}\right]$$

$$= \frac{1}{(1+\gamma)^2}\left[\gamma - \frac{1}{3}(1 - \gamma + \gamma^2) + (1 - \gamma)\sqrt{\frac{1}{3}(1 - \gamma + \gamma^2)}\right].$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, on obtient pour le maximum de y

$$\frac{1}{(1+\gamma)^2}\left[\gamma(1 - \gamma) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(1 - \gamma + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}\right],$$

et partant, pour le maximum correspondant A_1 du coefficient A,

$$A_1 = \frac{\beta}{(1 - \beta\gamma)(1+\gamma)^2}\left[\gamma(1 - \gamma) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(1 - \gamma + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Il est clair que B aurait un maximum analogue B_1 qu'on obtiendrait en permutant β avec γ, et dont il est inutile d'écrire la valeur.

On peut maintenant former une table à double entrée faisant connaître A_1 en fonction des arguments β et γ : cette table, la voici, quand on attribue aux deux arguments les valeurs 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5.

Tableau des valeurs de A_1.

VALEURS de γ.	VALEURS DU MAXIMUM A_1 POUR $\beta =$						VALEUR correspondante de q.
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	
0,0	0,0000	0,0385	0,0770	0,1155	0,1540	0,1925	0,4226
0,1	0,0000	0,0354	0,0715	0,1084	0,1460	0,1845	0,4084
0,2	0,0000	0,0323	0,0660	0,1011	0,1378	0,1761	0,3924
0,3	0,0000	0,0293	0,0605	0,0936	0,1292	0,1672	0,3745
0,4	0,0000	0,0263	0,0549	0,0861	0,1203	0,1578	0,3548
0,5	0,0000	0,0234	0,0494	0,0784	0,1111	0,1481	0,3333

Le même tableau sert au calcul de B_1 : il faut seulement, comme on l'a dit, permuter β avec γ, et q avec r. Exemple : pour $\beta = 0,2$, $\gamma = 0,4$, la valeur maximante de r serait 0,3924, et l'on aurait $B_1 = 0,1378$.

Ce tableau montre que : 1° *pour produire le maximum du moment sur un des deux appuis de la travée qui porte une charge concentrée, il faut placer celle-ci, non au milieu de l'intervalle des appuis, mais à une distance moindre à partir de l'appui dont on s'occupe; cette distance varie entre* 0,4226 *et* $\frac{1}{3}$ *de la travée, suivant que l'autre appui se rapproche plus ou moins d'un appui simple ou d'un encastrement, par l'influence de la solidarité des travées* (*); 2° *le maximum* A_1 *croît avec* β *et décroît quand* γ *augmente, c'est-à-dire que le maximum du moment sur l'un des appuis qui terminent la travée chargée croît de plus en plus à mesure que cet appui se rapproche de l'encastrement et que l'autre s'en éloigne davantage.*

(*) Tous les supports A_0, A_1, $A_2, \ldots$, A_{m-1}, $A_m, \ldots$ sont toujours censés constituer une série d'appuis simples, c'est-à-dire que chacun d'eux rend fixe un seul point de la fibre moyenne. Mais il peut se faire que la travée $A_{m-2}A_{m-1}$, par exemple, diminue indéfiniment de longueur, et alors le point A_{m-1} se change en un véritable encastrement, puisque l'élément $A_{m-2}A_{m-1}$ de la fibre moyenne conserve une position invariable; dans ce cas le nombre β de la travée suivante $A_{m-1}A_m$, ainsi que le nombre γ de la travée précédente $A_{m-3}A_{m-2}$, deviennent égaux à la limite $\frac{1}{2}$, comme on l'a déjà vu (n° 9). De même le nombre γ de la travée $A_{m-1}A_m$ prendrait la valeur $\frac{1}{2}$ si les appuis A_m, A_{m+1} se rapprochaient au point de se confondre. Au contraire, si la poutre finissait en A_{m-1}, ou si la travée $A_{m-1}A_m$ était précédée d'une autre infiniment longue,

Ces conséquences pourraient se démontrer, au moyen de l'expression analytique de A_1, plus rigoureusement sans doute que par le calcul numérique, mais aussi beaucoup plus longuement et péniblement.

Maxima du coefficient C. — Le coefficient C varie avec q proportionnellement à la fonction

$$qr - \beta qr^2(1+r) - \gamma rq^2(1+q) + 2\beta\gamma q^2 r^2;$$

calculons sa dérivée en considérant r comme fonction de q, et égalons-la à zéro : nous trouvons ainsi pour condition du maximum

$$\begin{aligned} 0 = r - q - \beta r^2(1+r) + \beta q(2r+3r^2) + \gamma q^2(1+q) \\ - \gamma r(2q+3q^2) + 4qr\beta\gamma(r-q), \end{aligned}$$

soit, après quelques réductions faciles à voir,

$$r - q + 2\beta r(1-2r^2) - 2\gamma q(1-2q^2) + 4\beta\gamma qr(r-q) = 0.$$

Cette équation détermine la valeur maximante de q; après le remplacement de r par $1-q$, elle est du troisième degré en q, de sorte qu'il faudrait se jeter dans des calculs inextricables pour en avoir les racines sous forme algébrique, et en conclure l'expression du maximum cherché. Nous nous contenterons donc de signaler des cas où son degré s'abaisse, d'indiquer dans tous les cas deux limites qui comprennent les racines, et enfin de donner un tableau des racines correspondantes à diverses valeurs numériques de β et γ.

1° Si l'on suppose $\beta = \gamma$, l'équation devient

$$r - q + 2\beta(r - 2r^3 - q + 2q^3) + 4\beta^2 qr(r-q) = 0,$$

ou bien

$$(r-q)[1 + 2\beta(1 - 2q^2 - 2qr - 2r^2) + 4\beta^2 qr] = 0.$$

Attendu qu'on a

$$q + r = 1,$$

---

son nombre β s'annulerait, et l'appui A_{m-1} jouerait le rôle d'un appui simple de la travée $A_{m-1}A_m$, relativement aux charges placées sur cette travée (n° 10). Une remarque entièrement analogue peut être faite au sujet de A_m et du nombre γ de la même travée.

Enfin, la disposition des travées contiguës peut faire passer β et γ par toutes les valeurs intermédiaires. Quand nous disons que A_{m-1}, par exemple, se rapproche d'un appui simple ou d'un encastrement, il faut entendre que β se rapproche de 0 ou de $\frac{1}{2}$, et avoir présentes à l'esprit les observations ci-dessus. Ce n'est là, en effet, qu'une manière de parler, qui ne suppose pas qu'on ait changé la nature de la liaison entre la poutre et chacun de ses appuis.

il en résulte

$$q^2 + 2qr + r^2 = 1,$$

et par conséquent

$$2(q^2 + qr + r^2) = 2(1 - qr);$$

donc aussi

$$(r - q)[1 + 2\beta(-1 + 2qr) + 4\beta^2 qr] = 0.$$

Or la quantité entre crochets peut s'écrire

$$(1 - 2\beta) + 4\beta qr(1 + \beta),$$

ce qui montre qu'elle ne s'annule par aucune valeur positive de q et r, puisque $1 - 2\beta$ est toujours positif. Donc l'équation du maximum donne

$$q = r = \frac{1}{2},$$

seule solution admissible dans le cas particulier de $\beta = \gamma$.

Les valeurs $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, introduites en même temps que $\beta = \gamma$ dans l'expression générale de C, donnent pour sa valeur correspondante

$$C = \frac{2 - \beta}{8(1 + \beta)}.$$

2° Si l'une des quantités β ou γ prend la valeur limite $\frac{1}{2}$, quelle que soit l'autre d'ailleurs, l'équation s'abaisse au second degré. En faisant, par exemple, $\beta = \frac{1}{2}$, elle prend la forme

$$r - q + r - 2r^3 - 2\gamma q(1 - 2q^2 - r^2 + qr) = 0,$$

ou bien

$$2r(1 - r^2) - q[1 + 2\gamma(1 - 2q^2 - r^2 + qr)] = 0.$$

On peut alors supprimer le facteur q ou $1 - r$, et l'on a

$$2r(1 + r) - 1 - 2\gamma(1 - 2q^2 - r^2 + qr) = 0,$$

soit, en mettant $1 - q$ au lieu de r et ordonnant,

$$2q^2(1 + 4\gamma) - 6q(1 + \gamma) + 3 = 0;$$

d'où l'on tire

$$q = \frac{3(1 + \gamma) - \sqrt{3(1 - 2\gamma + 3\gamma^2)}}{2(1 + 4\gamma)}.$$

Nous excluons le signe + du radical, parce qu'il donnerait $q > 1$, comme on peut le voir facilement.

De même, si γ était égal à $\frac{1}{2}$, on trouverait par une permutation de lettres

$$r = \frac{3(1+\beta) - \sqrt{3(1-2\beta+3\beta^2)}}{2(1+4\beta)},$$

et par suite

$$q = 1 - r = \frac{5\beta - 1 + \sqrt{3(1-2\beta+3\beta^2)}}{2(1+4\beta)}.$$

3° Si β et γ sont quelconques, la valeur cherchée de q se trouvera toujours comprise entre les limites

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3-\sqrt{3}}{2},$$

qui répondent respectivement à $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$, et à $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$. Substituons en effet ces nombres dans l'équation, nous obtiendrons les résultats :

pour $q = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \ldots \quad (2-\sqrt{3})(1-2\gamma) + 2\beta\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^2(1+\gamma)$,

pour $q = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \ldots \quad -(2-\sqrt{3})(1-2\beta) - 2\gamma\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^2(1+\beta)$.

Comme le premier est toujours positif et le second toujours négatif, la racine de l'équation est bien entre ces valeurs de q.

4° Si l'on permute ensemble β et γ d'une part, q et r de l'autre, l'équation ne change pas. Donc, quand on aura la racine q pour un système de valeurs

$$\beta = \beta', \quad \gamma = \gamma',$$

$1 - q$ sera la racine correspondante à

$$\beta = \gamma', \quad \gamma = \beta',$$

Ces diverses remarques nous ont permis de construire sans grande peine la table ci-après où se trouvent trente-six solutions particulières de notre équation, pour autant de systèmes de valeurs de β et γ : sur ces trente-six solutions, il y en a six immédiatement connues; sur les trente autres il suffit, en vertu de la remarque précédente (4°), d'en chercher quinze; enfin, sur ces quinze, on en obtient cinq par des équations du second degré, de sorte qu'il en reste seulement dix ayant exigé des tâtonnements numériques.

Tableau des valeurs de q pour lesquelles C devient maximum.

VALEURS de γ.	VALEUR MAXIMANTE DE q POUR β =					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,5000	0,5259	0,5532	0,5816	0,6087	0,6340
0,1	0,4741	0,5000	0,5285	0,5580	0,5872	0,6150
0,2	0,4468	0,4715	0,5000	0,5306	0,5616	0,5918
0,3	0,4184	0,4420	0,4694	0,5000	0,5321	0,5641
0,4	0,3913	0,4128	0,4384	0,4679	0,5000	0,5330
0,5	0,3660	0,3850	0,4082	0,4359	0,4670	0,5000

Connaissant q, on a par cela même r en prenant $1 - q$: on peut alors substituer ces valeurs dans l'expression connue de C, dont on obtient ainsi les maxima C_1. Voici les résultats de ce calcul.

Tableau des maxima du coefficient C.

VALEURS de γ.	MAXIMUM C_1 POUR β =					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,2500	0,2319	0,2152	0,2000	0,1863	0,1740
0,1	0,2319	0,2159	0,2010	0,1873	0,1750	0,1639
0,2	0,2152	0,2010	0,1875	0,1750	0,1637	0,1537
0,3	0,2000	0,1873	0,1750	0,1634	0,1530	0,1435
0,4	0,1863	0,1750	0,1637	0,1530	0,1429	0,1339
0,5	0,1740	0,1639	0,1537	0,1435	0,1339	0,1250

Enfin, la comparaison de ces maxima avec ceux, déjà connus, de A et B permet de choisir, pour chaque système de valeurs de β et γ, le plus grand des trois, et d'en faire le tableau suivant.

(K) **Tableau donnant les maxima maximorum des trois coefficients A, B, C.**

VALEURS de γ.	VALEUR DU PLUS GRAND DES TROIS NOMBRES A_1, B_1, C_1 POUR $\beta =$					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,2500	0,2319	0,2152	0,2000	0,1863	0,1925
0,1	0,2319	0,2159	0,2010	0,1873	0,1750	0,1845
0,2	0,2152	0,2010	0,1875	0,1750	0,1637	0,1761
0,3	0,2000	0,1873	0,1750	0,1634	0,1530	0,1672
0,4	0,1863	0,1750	0,1637	0,1530	0,1429	0,1578
0,5	0,1925	0,1845	0,1761	0,1672	0,1578	0,1481

Nous avons eu soin de souligner, dans ce tableau, les nombres qui expriment des valeurs de A_1 ou de B_1, cas auquel le maximum de C n'est pas le plus fort des trois. On voit que ce cas est pour ainsi dire exceptionnel, car il exige pour se produire que le plus grand des deux nombres β et γ soit supérieur à une certaine limite, voisine de la limite extrême de ces nombres. Pour la déterminer rigoureusement, il faudrait reconstruire un tableau analogue au précédent, mais en procédant par différences beaucoup moindres quand on ferait varier β ou γ entre 0,4 et 0,5. L'interpolation donnera, sans autant de peine, des résultats suffisamment exacts, et voici comment : en faisant, par exemple, $\beta = 0$ et $\gamma = 0,4$, on a $C_1 = 0,1863$, $B_1 = 0,1540$, $A_1 = 0$, de sorte que le maximum de C surpasse de $0,1863 - 0,1540 = 0,0323$ le plus grand des deux autres; au contraire, pour $\beta = 0$ et $\gamma = 0,5$, A_1 reste nul, mais B_1 l'emporte sur C_1 de $0,1925 - 0,1740 = 0,0185$: l'égalité se produira donc approximativement pour

$$\gamma = 0,4 + (0,5 - 0,4)\frac{323}{323 + 185} = 0,464.$$

Donc, si β est nul, il faudra, pour que le maximum de C ne soit pas le plus grand des trois, que γ dépasse 0,464. Un calcul analogue répété avec d'autres valeurs de β donne :

pour $\beta = 0,1, \quad 0,2, \quad 0,3, \quad 0,4, \quad 0,5,$
$\gamma = 0,458, \quad 0,454, \quad 0,450, \quad 0,449,$ quelconque.

Ces nombres s'écartent tous bien peu de 0,45 : ainsi l'on peut dire que la condition nécessaire du fait en question, c'est que la plus grande des quantités β et γ soit au-dessus de 0,45.

Les observations suivantes résultent encore des deux derniers tableaux :

1° C_1 est une fonction décroissante de β et de γ, c'est-à-dire que *plus l'un ou l'autre des deux appuis extrêmes de la travée se rapproche de l'encastrement, plus on a un petit maximum du moment de flexion dans leur intervalle.*

2° Le plus grand des trois maximums A_1, B_1, C_1 est une fonction décroissante de β et de γ, à la condition toutefois que le plus grand de ces deux derniers nombres ne dépasse pas la limite 0,45 qui rend C_1 inférieur à A_1 ou à B_1. En conséquence, *la plus petite valeur du plus grand maximum parmi* A_1, B_1, C_1 *répond à* $\beta = \gamma = 0{,}45$; *cette plus petite valeur, déduite par interpolation du tableau de* C_1 *ou de celui qui donne* A_1 *et* B_1, *sera environ* 0,1340.

Au reste, on peut calculer plus exactement la limite inférieure assignée à la plus grande des trois quantités A_1, B_1, C_1, maintenant qu'on sait qu'elle doit répondre à des valeurs égales de β et de γ. Sous cette condition il a été démontré que C_1 répond à $q = r = \frac{1}{2}$; donc

$$C_1 = \frac{1}{1-\beta^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\beta + \frac{1}{8}\beta^2\right) = \frac{2-\beta}{8(1+\beta)}.$$

D'ailleurs, pour $\beta = \gamma$, on a

$$A_1 = B_1 = \frac{\beta}{(1-\beta^2)(1+\beta)^2}\left[\beta(1-\beta) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(1-\beta+\beta^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

On reconnaît par tâtonnement que ces expressions de A_1 et de C_1 deviennent égales pour $\beta = 0{,}4494$ environ, et qu'elles prennent alors la valeur 0,1337 : ce nombre est donc la limite inférieure demandée.

Le cas où la charge porte sur l'une des travées extrêmes n'a, dans la question actuelle, rien de particulier que la nécessité de supposer $\beta = 0$ pour la première travée, $\gamma = 0$ pour la dernière. Il se trouve donc implicitement compris dans les tableaux numériques donnés ci-dessus. Seulement il n'est plus possible de faire descendre à 0,1337 le minimum du plus grand des coefficients A_1, B_1, C_1, puisqu'on n'est pas libre de prendre β et γ tous deux égaux à 0,4494. Soit par exemple $\beta = 0$: pour rendre C_1 égal au plus grand nombre A_1 ou B_1, il faudra qu'on ait, comme on l'a vu tout à l'heure, $\gamma = 0{,}464$, et par suite $C_1 = 0{,}1784$ (nombre déduit par interpolation du tableau de C_1). Ce serait la limite inférieure du plus grand des trois maximums A_1, B_1, C_1.

17. *Résumé du* § II. — Il ne sera peut-être pas inutile de jeter un coup d'œil en arrière et de récapituler brièvement les principaux résultats obtenus dans le § II : de cette manière on en saisira mieux l'enchaînement et la portée.

Étant donnée une poutre de n travées, dont la fibre moyenne est assujettie par conséquent à conserver $n+1$ points fixes, sans que sa direction y soit forcément invariable, nous commençons par calculer (n° 9), indépendamment de toute hypothèse particulière sur la charge, deux séries de nombres

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots,\ u_{n-1},\ u_n,$$
$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ldots,\ v_{n-1},\ v_n,$$

et nous en déduisons deux autres séries

$$\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ldots,\ \beta_{n-2},\ \beta_{n-1},$$
$$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ldots,\ \gamma_{n-2},\ \gamma_{n-1}.$$

Les deux premières commencent par $u_1 = v_1 = 1$; elles se composent de termes alternativement positifs et négatifs respectivement supérieurs, ou au moins égaux en valeur absolue à

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ldots,\ 2^{n-2},\ 2^{n-1};$$

les deux autres commencent par o et se composent de termes tous positifs et ne pouvant dépasser $\frac{1}{2}$. On a indiqué la signification des limites o et $\frac{1}{2}$: si dans les séries des nombres β et γ on considère β_{m-1} et γ_{n-m} comme appartenant spécialement à la $m^{ième}$ travée, chacun des deux appuis qui la terminent constituera, pour cette travée prise isolément, un appui simple ou un encastrement complet, suivant qu'un des nombres β_{m-1} ou γ_{n-m} prendra la valeur o ou la valeur $\frac{1}{2}$. Les séries des u, v suffiraient à la rigueur pour tous les calculs concernant les moments de flexion de la poutre; mais les autres sont plus commodes, surtout pour les calculs algébriques.

Cela posé, faisons agir une charge dans la $m^{ième}$ travée, en un point déterminé et connu. On pourra calculer, par des formules très-simples, les moments de flexion :

D'abord sur tous les points d'appui (nº 10);
Puis au point d'application de la charge (nº 11);
Et enfin en tout point de la pièce (nº 13).

Nous avons ensuite présenté diverses remarques et propositions au sujet des signes que peut prendre le moment fléchissant en un point donné, quand la charge varie en position dans toute l'étendue de la pièce. Nous avons reconnu que :

1° Le point étant pris dans la $m^{ième}$ travée, et la charge se déplaçant dans toutes celles qui sont à la suite, le signe du moment, pour le point dont il s'agit, change toutes les fois que la charge franchit un appui, et reste le même dans le cas contraire; la même chose arrive, bien entendu, quand la charge parcourt les travées de rang inférieur à m.

2° Quand la charge se meut dans la travée même où est le point, le moment de flexion est toujours positif au-dessus des appuis qui la terminent, toujours négatif au point d'application de la charge; on obtiendra une région centrale, où il sera aussi toujours affecté du signe —, en retranchant sur la longueur de la travée, à partir de chaque appui, les fractions $\frac{\beta}{1+\beta}$, $\frac{\gamma}{1+\gamma}$ de cette longueur; les points limites de la région des moments négatifs sont ceux où viennent concourir les droites représentatives des moments de la travée, quand la charge occupe une position quelconque au dehors.

Après avoir remarqué qu'une charge placée dans une certaine travée produit, en tous les points de la pièce, des moments dont les trois plus forts, en valeur absolue, ont lieu au point d'application même de cette charge et aux extrémités de la travée chargée, nous avons encore cherché la position du point d'application qui rend maximum chacun de ces trois moments. Pour une série de valeurs numériques attribuées à β et γ, nous avons indiqué cette position, qui ne coïncide pas en général avec le milieu de la travée, sans toutefois s'en écarter jamais plus que de $\frac{1}{6}$ de la longueur de celle-ci; nous avons en outre calculé les valeurs numériques des maxima.

Enfin nous avons supposé qu'on était libre de changer arbitrairement la disposition de tous les appuis de la poutre, sauf

ceux de la travée chargée, de manière à faire varier β et γ entre leurs limites o et $\frac{1}{2}$, et nous nous sommes demandé quelles seraient les variations correspondantes des trois maxima. On voit alors le maximum du moment sur un appui augmenter à mesure que cet appui se rapproche davantage de l'encastrement (ou, pour parler un langage plus précis, à mesure que son nombre β ou γ s'approche de $\frac{1}{2}$), et à mesure aussi que l'autre appui s'éloigne de la même condition; le maximum relatif au point d'application diminue de son côté, quand les deux appuis tendent vers l'encastrement. Ce dernier maximum est généralement le plus fort des trois; toutefois le contraire a lieu quand le plus grand des nombres β et γ excède une limite, à la rigueur variable avec l'autre, mais toujours peu différente de 0,45. Le plus fort des trois moments maxima diminue de plus en plus quand les deux nombres β et γ tendent vers cette limite, égale à 0,4494 pour $\beta=\gamma$; le plus fort des trois moments atteint alors une valeur minimum maximorum, au-dessous de laquelle il sera absolument impossible de le faire descendre, de quelque manière qu'on dispose les appuis des deux côtés de la travée chargée, en conservant toujours sa longueur. Si l'on représente par 1 le plus grand moment quand les deux appuis de la travée sont des appuis simples (β et γ étant nuls), il deviendra

0,7700 quand on substituera un encastrement à l'un d'entre eux $\left(\beta=0,\ \gamma=\frac{1}{2}\right)$,

0,5924 quand on les remplacera par deux encastrements $\left(\beta=\gamma=\frac{1}{2}\right)$,

0,5348 quand pour avoir le minimum maximorum on fera $\beta=\gamma=0,4494$.

Il faudrait donc, afin de diminuer autant que possible le moment maximum produit par une charge isolée, placée où l'on veut dans une travée, non pas encastrer complétement cette

travée sur ses deux appuis, mais s'arranger pour avoir $\beta=\gamma=0,4494$, c'est-à-dire pour avoir (s'il est permis de parler ainsi) *neuf dixièmes d'encastrement*.

S'il s'agit d'une travée extrême, on n'est plus libre de faire varier les deux nombres β et γ, car l'un d'eux a une valeur fixe égale à zéro. La valeur la plus favorable de l'autre est alors 0,464 environ; et si l'on représente encore par 1 le moment maximum dans l'hypothèse $\beta=0$, $\gamma=0$, ce maximum deviendra

0,7700 quand l'appui non placé à un bout de la poutre sera un encastrement,

0,7136 quand les travées à la suite de cet appui seront disposées de manière à donner la valeur 0,464 à celui des nombres β, γ qui n'est pas nul.

Nous passons maintenant à l'étude des moments qu'engendrerait une charge uniforme s'étendant sur la longueur complète d'une travée.

§ III. — Des moments de flexion produits par la charge uniforme d'une seule travée.

18. *Moments au-dessus des points d'appui.* — Une seule travée de la poutre étudiée au § II supporte une charge uniformément répartie sur sa longueur entière, et toutes les autres sont supposées vides; il s'agit d'abord de déterminer les moments de flexion qui ont lieu dans les sections de la poutre faites au-dessus des points d'appui. On peut résoudre la question en se servant des formules du n° 10, combinées avec le théorème général sur la superposition des effets des forces. Soit $A_{m-1}A_m$ (*fig.* 3, p. 34) la travée chargée, pa_m ou simplement pa la charge totale, calculée à raison de p kilogrammes par mètre courant sur toute la longueur a_m ou a de cette travée : on décomposera le poids pa en une infinité de poids élémentaires, dont l'un sera placé aux distances qa, ra des points A_{m-1}, A_m, et aura une intensité $padq$; pour les avoir tous, il suffira de faire varier le rapport q de 0 à 1. Au poids élémentaire $padq$ répondent, en A_{m-1} et A_m, les moments de flexion dX_{m-1}

et dX_m, donnés par les formules (14) et (15), où l'on remplacera Q par $padq$, en conservant d'ailleurs le sens des autres notations; on a donc

$$dX_{m-1} = pa^2 \frac{\beta}{1-\beta\gamma}[1+r-(1+q)\gamma]qrdq,$$

$$dX_m = pa^2 \frac{\gamma}{1-\beta\gamma}[1+q-(1+r)\beta]qrdq.$$

L'intégrale de ces équations, prise entre $q=0$ et $q=1$, donnera les moments X_{m-1} et X_m produits par l'ensemble des poids élémentaires, c'est-à-dire par le poids total pa : donc

$$X_{m-1} = pa^2 \frac{\beta}{1-\beta\gamma}\left[\int_0^1 (1+r)qrdq - \gamma\int_0^1 (1+q)qrdq\right],$$

$$X_m = pa^2 \frac{\gamma}{1-\beta\gamma}\left[\int_0^1 (1+q)qrdq - \beta\int_0^1 (1+r)qrdq\right];$$

la question est par conséquent ramenée à la recherche des deux intégrales définies qui entrent dans les expressions ci-dessus. Remarquons en premier lieu qu'elles sont égales, car la relation

$$q+r=1$$

entraîne, comme conséquence immédiate,

$$dr=-dq,$$

et par suite, si l'on prend r pour variable au lieu de q,

$$\int_0^1 (1+r)qrdq = -\int_1^0 (1+r)qrdr = \int_0^1 (1+r)qrdr;$$

or, la dernière intégrale ne diffère de $\int_0^1 (1+q)qrdq$ que par le changement de q en r et inversement, et partant elle lui est égale, puisque q et r sont liés par une relation symétrique et varient dans les mêmes limites. D'un autre côté, on a

$$\int_0^1 (1+q)qrdq = \int_0^1 (1-q^2)q\,dq = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$$

donc enfin nous pouvons écrire les formules

(1) $$X_{m-1} = \frac{1}{4} pa^2 \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma},$$

(2) $$X_m = \frac{1}{4} pa^2 \frac{\gamma(1-\beta)}{1-\beta\gamma}.$$

Les mêmes formules se démontrent peut-être plus simplement encore en les cherchant directement, sans employer le principe de la superposition des effets. En effet, si nous continuons toujours à supposer parfaitement fixes les points de la fibre moyenne primitive qui se trouvent au-dessus des appuis, et que nous appliquions en conséquence l'équation (10) du n° 6 à tous les groupes de deux travées consécutives, nous retrouverons identiquement les équations (11) du n° 10, à part cette différence que la $(m-1)^{ième}$ et la $m^{ième}$ auront pour second membre $\frac{1}{4}pa_m^3$, au milieu de $Qa_m^2qr(1+r)$ et $Qa_m^2qr(1+q)$. Pour résoudre un pareil système d'équations, il n'y aurait donc qu'à effectuer, dans les formules du n° 10, le remplacement de $Qa_mqr(1+r)$ et $Qa_mqr(1+q)$ par $\frac{1}{4}pa_m^2$, ce qui, entre autres résultats, reproduirait les formules (1) et (2) ci-dessus, où a signifie d'ailleurs la même chose que a_m.

Les $m-2$ premières équations (11) du n° 10 subsistant sans modification dans le cas actuel, ainsi que les $n-m-1$ dernières, il en résulte que les moments

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{m-2}, X_{m-1},$$
$$X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1}$$

doivent encore former deux séries, dans chacune desquelles les termes ont conservé les mêmes rapports deux à deux, exprimés par les nombres

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{m-2}, u_{m-1}$$

pour la première, et par

$$v_{n-m}, v_{n-m-1}, v_{n-m-2}, \ldots, v_2, v_1$$

pour l'autre. Ainsi donc, après avoir calculé X_{m-1} et X_m, on obtiendrait les autres moments sur les points d'appui par l'emploi des nombres u et v (n° 9), ou, ce qui revient au même, en faisant usage des formules (16) et (17) du n° 10.

Dans le cas particulier où la charge porte sur l'une des travées extrêmes, l'un ou l'autre des procédés de démonstration dont nous venons de faire usage conduit très-facilement à reconnaître qu'on doit faire β ou γ égal à zéro. Si par exemple la première travée est seule chargée, il faudra supposer $\beta = 0$, et l'on aura, par les formules (1) et (2),

$$X_0 = 0,$$

(3) $$X_1 = \frac{1}{4} p a_1^2 \gamma.$$

On obtiendrait ensuite les moments sur les autres points d'appui, au moyen du même procédé que dans le cas général; seulement on n'aurait plus à considérer que ce qui se passe d'un seul côté de la travée chargée, l'autre étant supprimé.

19. *Du moment de flexion en un point quelconque, dans une travée non chargée.* — Supposons qu'on veuille construire, pour les moments de flexion produits par le poids pa_m, une figure représentative analogue à la *fig.* 4 (n° 13). Après avoir marqué sur une horizontale la position des divers points d'appui ... A_{m-2}, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, ..., on élèvera en ces points des ordonnées proportionnelles aux moments correspondants. Les ordonnées $\overline{A_{m-1}E}$, $\overline{A_mG}$ auront pu changer de grandeur, mais elles resteront encore positives, car les formules (1) et (2) conduisent toujours à des valeurs positives de X_{m-1} et de X_m, puisque β et γ ne varient que de 0 à $\frac{1}{2}$. D'un autre côté, les rapports entre les diverses ordonnées

$$\overline{A_{m-1}E},\ \overline{A_{m-2}P},\ \overline{A_{m-3}S},\ldots$$

n'auront pas changé (n° 18), et il en sera de même pour les ordonnées

$$\overline{A_mG},\ \overline{A_{m+1}I},\ \overline{A_{m+2}L},\ldots.$$

Enfin, quand on aura construit toutes ces ordonnées, on devra

encore joindre par des lignes droites leurs extrémités consécutives, pour avoir la ligne représentative des moments de flexion dans les travées non chargées. En effet, l'équation (4) du n° 1 le prouve, en y faisant $\varphi(x) = 0$; et d'ailleurs le fait est bien aisé à constater directement : il suffit de remarquer que s'il n'y a aucune force appliquée dans l'intervalle de deux sections, le moment fléchissant dans chacune d'elles se compose d'une série de moments partiels, qui varient tous uniformément lorsqu'on passe de l'une à l'autre.

On voit donc qu'il n'y aura rien de changé dans les portions EPSU..., GILN... de la ligne polygonale dont les ordonnées représentent les moments fléchissants, sauf toutefois la grandeur des ordonnées $\overline{A_{m-1}E}$ et $\overline{A_m G}$; mais dans chacune de ces portions, toutes les ordonnées conservent leurs signes et leurs rapports entre elles. Nous en conclurons, par la répétition exacte des raisonnements faits au n° 13 :

1° Que si la charge parcourt successivement les diverses travées, en restant toujours, soit à droite, soit à gauche d'une travée fixe, le signe du moment de flexion, en un point déterminé de la travée fixe, change à chaque fois que la charge (couvrant toujours la longueur entière d'une travée unique) franchit un nouveau point d'appui;

2° Que les diverses droites représentatives des moments de flexion dans la travée fixe, droites dont chacune se rapporte à une position déterminée de la charge, forment deux faisceaux concourants sur la fibre moyenne, dont les sommets occupent une situation identique avec celle qu'ils avaient dans le cas de la charge concentrée.

Ainsi, en nommant a la longueur d'une travée, β et γ les deux nombres qui s'y rapportent, dans les séries β et γ (n° 9), il y aura un sommet à la distance $\frac{a\beta}{1+\beta}$ de l'extrémité gauche de la travée, et un autre à la distance $\frac{a\gamma}{1+\gamma}$ de l'extrémité droite.

Pour une travée extrême, les deux faisceaux se réduisent à un seul, dont le sommet coïncide avec l'extrémité de la poutre (n° 15).

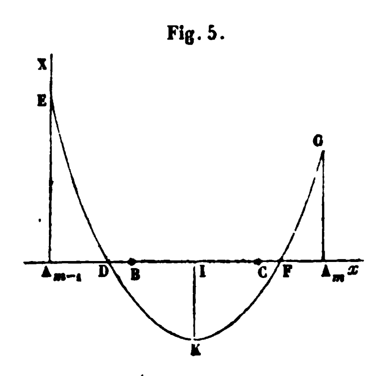
20. *Du moment de flexion en un point quelconque de la travée chargée.* — Soit toujours $A_{m-1}A_m$ cette travée : en nommant x la distance entre l'appui A_{m-1} et une section quelconque où le moment de flexion est X, et conservant les autres notations des numéros précédents, on aura (n° 1)

$$X = X_{m-1} + (X_m - X_{m-1})\frac{x}{a} - \frac{1}{2}px(a-x);$$

il s'agit de discuter cette expression.

A cet effet, imaginons que sur la ligne $A_{m-1}A_m$, prise pour axe des x (*fig.* 5), on porte en chaque point une ordonnée égale à X, de manière à construire la courbe représentative EDKFG. Cette courbe, d'après la forme de son équation, sera une parabole du second degré, tournant sa concavité du côté des X positifs. On sait déjà (n° 19) que ses ordonnées extrêmes $\overline{A_{m-1}E}$ et $\overline{A_m G}$ sont positives; mais une propriété très-importante

Fig. 5.



à établir, comme la suite le montrera, c'est que cette parabole a deux intersections, toujours réelles, avec l'axe des x, entre A_{m-1} et A_m; c'est, en second lieu, que ces intersections D et F comprennent toujours entre elles les points B et C, sommets des faisceaux concourants qui représentent les moments de flexion pour le cas où la charge n'est pas dans $A_{m-1}A_m$ (n° 19). En d'autres termes, les points D et F ne deviennent jamais imaginaires, et de plus on a

$$\overline{A_{m-1}D} < \frac{\beta}{1+\beta}\,\overline{A_{m-1}A_m}, \qquad \overline{A_m F} < \frac{\gamma}{1+\gamma}\,\overline{A_{m-1}A_m}.$$

Pour le démontrer, remplaçons dans X les moments X_{m-1} et X_m par leurs valeurs (1) et (2); il viendra

$$X = \frac{1}{4}pa^2\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma} + \frac{1}{4}pax\frac{\gamma-\beta}{1-\beta\gamma} - \frac{1}{2}px(a-x),$$

ou bien

$$\frac{2X}{pa^2} = \frac{x^2}{a^2} - \left[1 - \frac{\gamma - \beta}{2(1-\beta\gamma)}\right]\frac{x}{a} + \frac{\beta(1-\gamma)}{2(1-\beta\gamma)}.$$

Ceci posé, faisons dans l'équation ci-dessus x égal à l'abscisse du point B, c'est-à-dire

$$x = a\frac{\beta}{1+\beta};$$

le résultat de la substitution sera

$$\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2 - \left[1 - \frac{\gamma-\beta}{2(1-\beta\gamma)}\right]\frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\beta(1-\gamma)}{2(1-\beta\gamma)},$$

ou bien, en réduisant,

$$-\frac{\beta(1-\beta)}{2(1+\beta)^2}.$$

Ce résultat est nécessairement négatif, puisque β est un nombre positif compris entre o et $\frac{1}{2}$; donc le moment X devient négatif en B, et comme il était positif en A_{n-1}, il a dû s'annuler dans l'intervalle, en un point tel que D. La même démonstration établit, sans y rien ajouter, que X s'annule aussi pour un point F compris entre C et A_n, car ce qui est vrai d'une manière générale pour le côté gauche d'une travée doit l'être aussi pour le côté droit, que rien, au fond, ne distingue de l'autre : il aurait suffi de compter les x à partir de A_n, et de permuter β avec γ pour avoir à refaire sur le point F exactement les mêmes calculs que sur le point D. Ces points occupent donc bien la position que nous avons indiquée.

Les mêmes propriétés se déduisent encore, par des raisonnements bien simples, des résultats généraux obtenus au § II. On sait, en effet (n° 14), que l'un quelconque des poids élémentaires qui, par leur réunion, forment la charge totale pa, donne lieu à des moments de flexion forcément négatifs dans une certaine portion centrale de la travée, précisément entre les points B et C. Donc, en superposant tous les effets partiels (n° 5), on obtiendra toujours en B et C des moments négatifs, c'est-à-dire des ordonnées négatives pour la courbe

EDKFG; on en conclura, comme ci-dessus, qu'elle coupe l'axe des x dans l'intervalle $A_{m-1}B$ et dans l'intervalle A_mC; elle ne saurait du reste le couper ailleurs, puisque cette courbe est une parabole du second degré.

Les distances $\overline{A_{m-1}D}$, $\overline{A_mF}$ ou les abscisses des points D et F doivent satisfaire à l'équation $X=0$, qui donne

$$(4)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\left[1-\frac{\gamma-\beta}{2(1-\beta\gamma)}\right]\frac{x}{a}+\frac{\beta(1-\gamma)}{2(1-\beta\gamma)}=0;$$

de là on déduit

$$(5)\left\{\begin{aligned}\frac{2x}{a}&=1-\frac{\gamma-\beta}{2(1-\beta\gamma)}\pm\sqrt{\left[1-\frac{\gamma-\beta}{2(1-\beta\gamma)}\right]^2-\frac{2\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma}}\\&=1-\frac{\gamma-\beta}{2(1-\beta\gamma)}\pm\sqrt{\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{1-\beta\gamma}+\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma-\beta}{1-\beta\gamma}\right)^2}.\end{aligned}\right.$$

Le signe $-$ du radical répond au point D, le signe $+$ au point F.

Considérons maintenant les distances $\overline{A_{m-1}D}$ et $\overline{A_mF}$ comme fonctions des variables β, γ, et demandons-nous les états de grandeur par lesquels elles peuvent passer. La distance $\overline{A_{m-1}D}$ satisfait à l'équation (4), et sa valeur dans la formule (5) répond, comme nous l'avons dit, au signe $-$ du radical; imaginons cette valeur mise à la place de x dans l'équation (4) et différentions celle-ci par rapport à γ. Nous trouvons ainsi

$$\frac{2x}{a^2}\frac{dx}{d\gamma}-\left[1-\frac{\gamma-\beta}{2(1-\beta\gamma)}\right]\frac{dx}{ad\gamma}+\frac{x}{2a}\cdot\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\gamma)^2}-\frac{\beta(1-\beta)}{2(1-\beta\gamma)^2}=0,$$

ou, en ordonnant,

$$\left[\frac{2x}{a}-1+\frac{\gamma-\beta}{2(1-\beta\gamma)}\right]\frac{dx}{ad\gamma}+\frac{1-\beta}{2(1-\beta\gamma)^2}\left[\frac{x}{a}(1+\beta)-\beta\right]=0;$$

or, le radical de la formule (5) étant désigné par R, on a ici

$$\frac{2x}{a}=1-\frac{\gamma-\beta}{2(1-\beta\gamma)}-R;$$

donc la dernière équation donne

$$\frac{dx}{ad\gamma} = \frac{1-\beta}{2R(1-\beta\gamma)^2}\left[\frac{x}{a}(1+\beta)-\beta\right].$$

Il en résulte que $\overline{A_{n-1}D}$ est une fonction décroissante de γ, car on sait que $\frac{x}{a}$ est $< \frac{\beta}{1+\beta}$, de sorte que la dérivée $\frac{dx}{d\gamma}$ est négative. Les valeurs extrêmes de $\overline{A_{n-1}D}$ répondent donc aux limites $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$, et sont respectivement, d'après la formule (5):

pour $\gamma = 0$,

$$\overline{A_{n-1}D} = \frac{a}{2}\left[1+\frac{1}{2}\beta-\left(1-\frac{1}{2}\beta\right)\right] = \frac{\beta a}{2};$$

pour $\gamma = \frac{1}{2}$,

$$\overline{A_{n-1}D} = \frac{a}{2}\left[1-\frac{1-2\beta}{2(2-\beta)}-\sqrt{\frac{1-\beta}{2-\beta}+\frac{1}{4}\left(\frac{1-2\beta}{2-\beta}\right)^2}\right]$$
$$= a\,\frac{3-\sqrt{9-16\beta+8\beta^2}}{4(2-\beta)}.$$

La première expression, proportionnelle à β, varie de 0 à $\frac{a}{4}$, lorsque β passe lui-même de 0 à $\frac{1}{2}$; la seconde, ayant sa dérivée proportionnelle à

$$\frac{7-8\beta+3\sqrt{9-16\beta+8\beta^2}}{(2-\beta)^2\sqrt{9-16\beta+8\beta^2}},$$

quantité forcément positive pour $\beta < \frac{1}{2}$, prend ses valeurs extrêmes quand on fait $\beta = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$, ce qui donne 0 et $\frac{a}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. Ainsi donc la longueur $\overline{A_{n-1}D}$ ne dépasse pas $\frac{1}{4}$ de celle de la travée; il en est de même, évidemment, pour $\overline{A_nF}$.

Le tableau ci-après donne une idée encore plus complète de la manière dont varie $\overline{A_{m-1}D}$; il fera connaître aussi $\overline{A_m F}$ en permutant les arguments β et γ.

Tableau des valeurs de la distance $A_{m-1}D$ (*fig.* 5).

VALEURS de γ.	RAPPORT DE $\overline{A_{m-1}D}$ AVEC a, POUR $\beta =$					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,0000	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500
0,1	0,0000	0,0477	0,0962	0,1454	0,1951	0,2454
0,2	0,0000	0,0452	0,0918	0,1398	0,1891	0,2397
0,3	0,0000	0,0423	0,0866	0,1331	0,1818	0,2326
0,4	0,0000	0,0388	0,0804	0,1250	0,1724	0,2235
0,5	0,0000	0,0349	0,0731	0,1150	0,1610	0,2113

Quand on suppose $\beta = \gamma$, hypothèse qui se réalise nécessairement pour la travée centrale d'une poutre symétrique, la formule (5) se simplifie et devient

$$(6) \qquad \frac{2x}{a} = 1 \pm \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Dans le cas particulier où la première travée porte la charge, on sait que les valeurs de X_{m-1} et X_m s'obtiennent en faisant $\beta = 0$ dans leurs expressions générales. Il faut donc aussi introduire cette valeur particulière de β dans la formule (5) qui devient alors

$$(7) \qquad \frac{2x}{a} = 1 - \frac{1}{2}\gamma \pm \left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right),$$

d'où résultent les racines

$$\frac{x}{a} = 0, \quad \frac{x}{a} = 1 - \frac{1}{2}\gamma.$$

Le point D se confond avec A_{m-1} ou A_0 (ce qui est facile à prévoir puisqu'on sait que $\overline{A_{m-1}E}$ doit s'annuler), et la distance $\overline{A_m F}$ ou $\overline{A_1 F}$ devient $\frac{a\gamma}{2}$. Pareillement, dans le cas de $m = n$,

on aurait trouvé le point F confondu avec A_m et $\overline{A_{m-1}D} = \frac{a\beta}{2}$.

Entre les points D et F, à égale distance de chacun d'eux, l'ordonnée négative de la parabole passe par un maximum en grandeur absolue. Nous allons l'étudier tout à l'heure.

21. *Moments de flexion maxima produits par la charge uniforme d'une travée unique.* — Il a été dit (n° 19) que si une seule travée est chargée uniformément, les moments de flexion conservent, dans le reste de la pièce, des rapports identiques avec ceux qu'ils ont sous l'action d'une charge concentrée sur un point de la même travée. Ces moments décroissent donc en valeur absolue (n° 13) à droite et à gauche de la travée chargée; donc les trois ordonnées $\overline{A_{m-1}E}$, $\overline{A_mG}$, $\overline{IK}$ (*fig.* 5) représentent les plus grands moments dus au poids pa, uniformément réparti sur la longueur totale a de la travée $A_{m-1}A_m$. Désignons-les par

$$A'pa^2, \quad B'pa^2, \quad C'pa^2,$$

et voyons comment varient les rapports A′, B′, C′ avec les quantités β et γ qui suffisent pour les définir.

D'abord on a, suivant les formules (1) et (2) du n° 18,

$$A' = \frac{\beta(1-\gamma)}{4(1-\beta\gamma)},$$

$$B' = \frac{\gamma(1-\beta)}{4(1-\beta\gamma)}.$$

On en tire les dérivées partielles

$$\frac{dA'}{d\beta} = \frac{1-\gamma}{4(1-\beta\gamma)^2}, \qquad \frac{dA'}{d\gamma} = -\frac{\beta(1-\beta)}{4(1-\beta\gamma)^2},$$

$$\frac{dB'}{d\beta} = -\frac{\gamma(1-\gamma)}{4(1-\beta\gamma)}, \qquad \frac{dB'}{d\gamma} = \frac{1-\beta}{4(1-\beta\gamma)^2}.$$

Aucune de ces dérivées ne peut changer de signe, ni s'annuler pour β et γ compris entre 0 et $\frac{1}{2}$; A′ est donc, dans cet intervalle, fonction croissante de β et fonction décroissante de γ; le contraire a lieu pour B′. Ainsi, *avec la charge uniforme comme avec la charge concentrée, le moment de flexion sur l'un des deux appuis de la travée chargée est d'autant plus fort que cet appui s'approche plus de l'encastrement, et que l'autre s'en écarte davantage.* Le maximum de A′ répond par conséquent à $\gamma = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, et a pour valeur 0,125; c'est aussi la valeur maximum de B′, répondant à $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Voici au reste un tableau donnant directement A′ pour

diverses grandeurs des arguments β et γ, et donnant aussi B′ par permutation de β avec γ.

Tableau des valeurs de A′.

VALEURS de γ.	RAPPORT A′ POUR $\beta =$					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,0000	0,0250	0,0500	0,0750	0,1000	0,1250
0,1	0,0000	0,0227	0,0459	0,0696	0,0938	0,1184
0,2	0,0000	0,0204	0,0417	0,0638	0,0870	0,1111
0,3	0,0000	0,0180	0,0372	0,0577	0,0795	0,1029
0,4	0,0000	0,0156	0,0326	0,0511	0,0714	0,0938
0,5	0,0000	0,0132	0,0278	0,0441	0,0625	0,0833

Le troisième maximum $\overline{\text{IK}}$ répond à la moyenne des valeurs de $\frac{x}{a}$ données par la formule (5) du numéro précédent, soit à

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\gamma - \beta}{2(1 - \beta\gamma)}\right];$$

substituant cette expression dans celle de $\frac{X}{pa^2}$, et changeant le signe du résultat, on trouve

$$C' = \frac{1}{8}\left[1 - \frac{\gamma - \beta}{2(1 - \beta\gamma)}\right]^2 - \frac{\beta(1-\gamma)}{4(1-\beta\gamma)} = \frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{8(1-\beta\gamma)} + \frac{1}{32}\left(\frac{\gamma - \beta}{1 - \beta\gamma}\right)^2.$$

Par suite on a

$$\begin{aligned}\frac{8\,dC'}{d\beta} &= -\frac{(1-\gamma)^2}{(1-\beta\gamma)^2} - \frac{(\gamma-\beta)(1-\gamma^2)}{2(1-\beta\gamma)^3},\\ &= \frac{1-\gamma}{2(1-\beta\gamma)^3}[\beta(1+3\gamma-2\gamma^2) - (2-\gamma+\gamma^2)];\end{aligned}$$

or, quand γ varie de 0 à $\frac{1}{2}$, le trinôme $2 - \gamma + \gamma^2$ ne peut descendre au-dessous de 1,75, et le trinôme $1 + 3\gamma - 2\gamma^2$ ne peut devenir supérieur à 2; comme, d'un autre côté, β ne dépasse pas $\frac{1}{2}$, la quantité entre crochets reste négative, ainsi que $\frac{dC'}{d\beta}$, dans les mêmes limites de γ. Donc C′ est une fonction décroissante de β et aussi de γ, car β et γ entrent symétriquement dans cette fonction; c'est-à-dire que, *pour la charge uni-*

forme comme pour la charge concentrée, le maximum du moment fléchissant vers le milieu de la travée décroît à mesure que la continuité de la poutre permet davantage d'assimiler à des encastrements les deux appuis de cette travée.

L'hypothèse $\beta = \gamma = 0$ donne le maximum de C', égal à 0,125; l'hypothèse $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$ donne le minimum, égal à 0,0417, soit à $\frac{1}{24}$. Les diverses valeurs intermédiaires se trouvent d'ailleurs dans le tableau ci-dessous.

Tableau des valeurs de C'.

VALEURS de γ.	VALEURS DE C' POUR $\beta =$					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,1250	0,1128	0,1013	0,0903	0,0800	0,0703
0,1	0,1128	0,1023	0,0922	0,0825	0,0734	0,0647
0,2	0,1013	0,0922	0,0833	0,0748	0,0667	0,0590
0,3	0,0903	0,0825	0,0748	0,0673	0,0601	0,0532
0,4	0,0800	0,0734	0,0667	0,0601	0,0536	0,0474
0,5	0,0703	0,0647	0,0590	0,0532	0,0474	0,0417

Nous pouvons maintenant former sans peine le tableau qui indique le plus grand des trois coefficients A', B', C'. Nous le donnons ci-après, en soulignant les nombres qui proviennent soit de A', soit de B'.

(K') **Tableau indiquant le plus grand des trois coefficients A', B', C'.**

VALEURS de γ.	VALEUR DU PLUS GRAND DES TROIS COEFFICIENTS A', B', C', POUR $\beta =$					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,1250	0,1128	0,1013	0,0903	0,1000	0,1250
0,1	0,1128	0,1023	0,0922	0,0825	0,0938	0,1184
0,2	0,1013	0,0922	0,0833	0,0748	0,0870	0,1111
0,3	0,0903	0,0825	0,0748	0,0673	0,0795	0,1029
0,4	0,1000	0,0938	0,0870	0,0795	0,0714	0,0938
0,5	0,1250	0,1184	0,1111	0,1029	0,0938	0,0833

On voit que C' l'emporte sur A' et sur B', tant que le plus fort des nombres β et γ ne dépasse pas 0,3; au contraire, A' ou B' l'emporte sur C', quand l'un des nombres β ou γ atteint 0,4. Pour déterminer le point exact où le changement s'opère, supposons $\beta > \gamma$; alors on aura $A' > B'$, et en égalant A' à C' on trouvera l'équation

$$\beta(1-\gamma) = \frac{1}{2}(1-\beta)(1-\gamma) + \frac{(\gamma-\beta)^2}{8(1-\beta\gamma)},$$

qui, pour chaque valeur de γ, fournira la valeur de β correspondant au changement de C' en A' dans le tableau ci-dessus. On obtient de cette manière les résultats suivants :

$\gamma =$	0,0,	0,1,	0,2,	0,3,	0,3333...,
$\beta =$	0,3432,	0,3388,	0,3354,	0,3335,	0,3333...,
$A' = C' =$	0,0858,	0,0789,	0,0719,	0,0649,	0,0625....

Le changement en question a donc lieu quand le plus fort des nombres β ou γ atteint une limite, variable à la rigueur avec l'autre, mais toujours peu éloignée de $\frac{1}{3}$, la limite est exactement $\frac{1}{3}$, comme le montre la dernière équation, en supposant $\beta = \gamma$.

Dans le cas particulier où l'on charge une travée de rive, on a déjà vu plusieurs fois qu'il faut faire $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$; les résultats relatifs à ce cas figurent donc dans les tableaux numériques précédents.

22. *Comparaison des moments de flexion maxima, dans les deux cas d'une charge uniformément répartie sur une travée, ou concentrée en un seul point de la même travée.* — On suppose d'abord qu'une charge concentrée Q agisse en un point arbitrairement choisi sur la poutre; puis, que cette charge soit transformée en une autre pa, de même intensité, mais uniformément répartie sur la même travée que la première; on demande de comparer entre eux les plus grands moments de flexion qui se produisent dans les deux cas.

Les maxima dont il s'agit ont été étudiés en détail aux nos 16 et 21. La charge Q étant placée de la manière la plus défavorable à la résistance, sans sortir d'une même travée, on a représenté les moments maxima qu'elle produit par

$$A_1 Qa,\quad B_1 Qa,\quad C_1 Qa;$$

ceux que produit la charge uniforme ont été représentés (n° 21) par

$$A' pa^2,\quad B' pa^2,\quad C' pa^2,$$

et comme l'énoncé de la question suppose $Q = pa$, il faudra simplement

comparer A_1, B_1, C_1 avec A′, B′, C′. La comparaison pourrait se faire entre moments de flexion homologues, c'est-à-dire qu'on mettrait en parallèle A_1 avec A′, B_1 avec B′, C_1 avec C′; mais pour la conséquence pratique à tirer de cette discussion, il suffira de choisir dans chaque groupe le plus fort coefficient, et de voir quel changement il éprouve en passant d'un groupe à l'autre. Ce plus fort coefficient dans chaque groupe a été calculé pour une série de valeurs attribuées aux arguments β et γ; on en a donné le tableau (K) au n° 16, et le tableau (K′) au n° 21. Il ne reste qu'à diviser les nombres du premier par ceux du second, et l'on obtient les résultats dont voici le tableau :

Tableau indiquant le résultat de la division des nombres (K) par les nombres (K′).

VALEURS de γ.	VALEURS DU QUOTIENT POUR $\beta =$					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	2,00	2,06	2,12	2,21	1,86	1,54
0,1	2,06	2,11	2,18	2,27	1,87	1,56
0,2	2,12	2,18	2,25	2,34	1,88	1,58
0,3	2,21	2,27	2,34	2,43	1,92	1,62
0,4	1,86	1,87	1,88	1,92	2,00	1,68
0,5	1,54	1,56	1,58	1,62	1,68	1,78

Il est donc constaté que le rapport $\left(\frac{K}{K'}\right)$ du plus grand moment produit par une charge concentrée, à celui qu'elle produirait en la répartissant uniformément sur la même travée, ne demeure pas constant, mais qu'il varie avec les nombres β et γ de la travée. Sa plus petite valeur 1,54 répond au cas où l'un de ces nombres est o et l'autre $\frac{1}{2}$, ce qui signifie que la travée devrait être encastrée par un bout et n'avoir à l'autre qu'un simple appui d'extrémité. Quant à la valeur la plus forte, elle ne figure pas dans le tableau, parce qu'on n'a pas fait croître β et γ par différences assez faibles. Pour la trouver, sans aborder une discussion algébrique très-minutieuse et d'ailleurs peu intéressante, on regardera comme suffisamment établi par le calcul numérique du tableau ci-dessus :

1° Que le rapport $\left(\frac{K}{K'}\right)$ va en croissant avec β et γ, à partir de $\beta = o$, $\gamma = o$;

2° Qu'il commence à décroître à l'instant où C' cesse d'être le plus grand des trois coefficients A', B', C'.

On reprendra en conséquence les groupes de valeurs

$$\gamma = 0, \quad 0,1, \quad 0,2, \quad 0,3, \quad 0,3333\ldots,$$
$$\beta = 0,3432, \quad 0,3388, \quad 0,3354, \quad 0,3335, \quad 0,3333\ldots,$$

pour lesquelles C' cesse de surpasser A' et B', comme on l'a vu plus haut (n° 21); avec ces valeurs, C_1 l'emporte sur A_1 et B_1 (n° 16) et devient

$$0,1941, \quad 0,1825, \quad 0,1710, \quad 0,1599, \quad 0,15625,$$

nombres dont les quatre premiers ont été déduits du tableau de C_1 (n° 16), par interpolation, tandis que le dernier résulte de la formule $C_1 = \frac{2-\beta}{8(1+\beta)}$, relative au cas de $\beta = \gamma$ (n° 16). Cherchant enfin le quotient de ces valeurs de C_1 par celles de C' qui répondent aux mêmes β et γ, savoir (n° 16)

$$0,0858, \quad 0,0789, \quad 0,0719, \quad 0,0649, \quad 0,0625,$$

on trouve

$$2,26, \quad 2,31, \quad 2,38, \quad 2,46, \quad 2,50.$$

La limite supérieure du rapport $\left(\frac{K}{K'}\right)$ est donc 2,5, ou le rapport de 5 à 2.

Nous arrivons donc à conclure que, dans le cas le plus défavorable, le moment maximum produit par une charge concentrée, variable de position entre deux appuis consécutifs, peut atteindre deux fois et demie le maximum produit par une charge d'égale intensité, uniformément répartie sur la longueur entière de la même travée. Ordinairement les constructeurs admettent que le premier maximum est double du second, par analogie avec ce qui se passe dans une poutre simplement appuyée à ses deux extrémités. Quoiqu'on fasse ainsi bon marché de l'influence que peut avoir la solidarité mutuelle des travées, on voit qu'il n'en résulte pas d'erreur bien grave, puisque le rapport évalué un peu arbitrairement à 2 varie entre les limites extrêmes 1,54 et 2,50, suivant les diverses longueurs que présentent les travées situées à droite et à gauche de celle où l'on place la charge. Toutefois, quand il s'agit de transformer une charge concentrée en charge uniforme équivalente (au point de vue du moment de flexion maximum), nous pensons que les ingénieurs devraient distinguer les cas d'une poutre à deux appuis simples et d'une poutre à plusieurs travées solidaires : dans le premier, ils conserveraient le coefficient 2; mais, dans le second, s'ils ne voulaient pas déterminer exactement celui qui convient à chaque travée de leur poutre, ils pourraient prendre 2,5. De cette manière ils seraient à l'abri de toute critique, du moins en ce qui concerne le calcul de la limite supérieure des moments fléchissants.

Les §§ II et III contiennent, sur les effets propres d'une charge concentrée ou d'une charge uniformément distribuée le long d'une travée unique, une série de propositions qui semblent avoir déjà, par elles-mêmes, un certain intérêt; mais notre but principal, en les donnant, était de préparer l'exposition du § IV ci-après qui, joint au § I, forme une théorie générale des moments de flexion dans une poutre à plusieurs appuis disposés d'une manière quelconque.

§ IV. — Courbes enveloppes des moments.

23. *Définition de la charge permanente et de la surcharge d'une poutre.* — La principale application qu'on ait faite des poutres à plusieurs travées solidaires a été leur emploi dans les ponts métalliques destinés au passage d'une voie ferrée; ce sont les poutres de cette espèce que nous aurons principalement en vue dans la suite de cet ouvrage, bien que nos formules et calculs puissent s'appliquer à d'autres cas. Or ces poutres doivent être soumises :

1° A une charge permanente uniformément répartie sur leur longueur entière, comprenant, outre le poids propre de la pièce, celui du plancher et de la voie;

2° A des surcharges accidentelles couvrant entièrement une ou plusieurs travées choisies comme on voudra, ces surcharges ayant toujours une répartition uniforme sur les travées qu'elles embrassent.

Nous nommerons p et p' les poids, par mètre courant, de la charge permanente et des surcharges. Nous continuerons encore à supposer que les appuis donnent une fixité complète aux points correspondants de la fibre moyenne primitive.

Que la charge permanente soit uniformément distribuée, c'est un fait que nous n'avons pas à discuter et qui résulte des conditions mêmes de la construction, notamment de ce que le poids de la voie est uniforme, ainsi que celui du plancher, des entretoises, etc.

Mais la surcharge constitue l'épreuve exigée dans l'intérêt de la sécurité publique, et l'on est maître de la modifier arbitrairement. Par quelles raisons l'a-t-on donc composée comme nous venons de le dire? Pourquoi sa répartition est-elle uniforme, et pourquoi embrasse-t-elle toujours des travées com-

plètes, formant une suite continue, ou séparées par des travées sans surcharge, à la volonté de celui qui fait l'épreuve? Ce sont là des questions que nous allons examiner brièvement.

D'abord l'uniformité de la répartition se justifie par la nature des charges passagères qui doivent franchir le pont et en vue desquelles il a été construit. Les convois de voyageurs ou de marchandises n'ont pas un poids rigoureusement constant par unité de longueur; mais cela existe d'une manière suffisamment approximative. Tout au plus pourrait-on objecter le poids considérable de certaines locomotives à marchandises, qui, par leur excédant de poids comparativement aux wagons, forment comme une charge concentrée, en tête du convoi. Pour en tenir compte d'une manière large, on multipliera cette charge concentrée par 2,5 (n° 22), et alors on la considérera comme uniformément répartie.

Les convois, dont la longueur est variable entre des limites assez écartées, peuvent s'étendre, soit sur une travée, soit sur deux, soit sur un plus grand nombre. Il est vrai qu'ils n'ont pas de discontinuité, tandis que la surcharge définie plus haut peut présenter une ou plusieurs fois des groupes de travées chargées, séparées les unes des autres par des travées vides. En imposant ainsi l'épreuve de quelques combinaisons de surcharge qui ne se réaliseront pas en pratique, on oblige les constructeurs de donner à leurs ponts un certain excès de stabilité, faible inconvénient si l'excès n'est pas lui-même trop grand; or c'est là un point dont la démonstration complète offrirait quelques difficultés, mais qu'admettront sans peine les personnes exercées au calcul des poutres.

Enfin, nous devons encore nous demander pourquoi la surcharge d'épreuve embrasse toujours des travées entières et non des fractions de travée.

Quelle que soit la surcharge, on peut toujours la regarder comme composée d'une infinité de poids élémentaires, proportionnels aux longueurs qu'ils recouvrent, et l'on doit se réserver de choisir leurs points d'application de la manière la plus défavorable à la stabilité, afin que l'épreuve soit aussi concluante que possible. Parmi tous les poids élémentaires, les uns produiront, en une section déterminée de la poutre, des

moments fléchissants positifs, les autres des moments négatifs (n° 13); de sorte que les moments produits dans la section dont il s'agit, par toutes les combinaisons possibles de surcharge, varieront entre deux limites, l'une positive, l'autre négative. Ces deux limites sont utiles à connaître pour vérifier la stabilité du pont, et même, quand la poutre a une section symétrique relativement à l'horizontale de son centre de gravité, la plus grande des deux suffit; quant aux valeurs intermédiaires, elles ne servent absolument à rien. On doit donc laisser de côté, comme superflues, toutes les combinaisons de surcharge qui ne donneraient pas l'une des limites. Or, on a vu (n° 13) que si l'on choisit un point M dans une travée (T), tous les poids placés dans une autre travée (T′) produiront en M des moments fléchissants ayant tous le même signe; ces moments s'additionneront donc entre eux quand la surcharge (T′) sera complète, et donneront un total arithmétiquement plus grand que si elle ne l'était pas. Donc :

1° *Chacune des deux limites du moment de flexion, en un point appartenant à une travée* (T), *ne peut répondre qu'à une combinaison de surcharge dans laquelle toutes les travées autres que* (T) *seraient ou complétement surchargées, ou complétement privées de surcharge.*

Quand on considère l'action d'un poids variable de position dans la travée (T) seulement, on sait (n° 14) que le moment de flexion a un signe déterminé aux points extrêmes de cette travée et dans une certaine région centrale que nous avons signalée. Donc :

2° *Si le point* M *est sur l'un des appuis qui terminent la travée* (T) *ou dans ladite région centrale, chacune des deux limites du moment de flexion en* M *ne pourra répondre qu'à une combinaison de surcharge dans laquelle* (T) *serait ou complétement ou pas du tout surchargée.*

L'usage adopté de ne s'occuper que des surcharges s'étendant sur des travées entières, et non sur des fractions de travée, est donc en partie justifié. Mais nous sommes forcé de reconnaître qu'il ne l'est pas complétement. Le point M peut être tellement situé dans (T), que les divers poids élémentaires de cette travée produiront en M, les uns des moments positifs,

les autres des moments négatifs. Alors, si l'on veut chercher la limite positive, par exemple, il est clair que parmi ces poids élémentaires on devrait conserver seulement les premiers, tandis qu'il faudrait les enlever tous pour ne garder que les seconds, s'il s'agissait d'avoir la limite négative. *Dans les deux cas, la travée* (T) *serait incomplétement surchargée.*

Ainsi donc, afin de procéder avec rigueur, on se trouverait parfois conduit à rechercher les limites de position entre lesquelles peut agir un poids, dans une travée, pour donner lieu, en certains points de la même travée, à des moments de signe déterminé à l'avance. C'est la question que nous avons mentionnée à la fin du n° 14; sa solution ne dépendrait toujours que d'équations du second degré à une seule inconnue. Malheureusement ce serait une complication nouvelle ajoutée à des calculs déjà passablement longs, et les constructeurs ne l'accepteraient sans doute qu'avec répugnance. Comme l'hypothèse de la surcharge complète des travées est d'ailleurs consacrée par de nombreuses applications, sans qu'on y ait encore reconnu d'inconvénient grave, et que de plus, en matière de calculs pratiques, il faut savoir de temps en temps sacrifier un peu de rigueur à la simplicité, nous nous décidons à adopter, dans tout ce qui va suivre, l'hypothèse en question, malgré le vice que nous venons de lui reconnaître.

24. *Définition des courbes enveloppes; relation entre les deux limites du moment fléchissant produit par la surcharge en un point déterminé.* — En écartant, conformément à ce qui a été dit tout à l'heure (n° 23), toutes les combinaisons de surcharges où entreraient des fractions de travées, il reste encore, dans une poutre à n travées, à considérer les surcharges sur les groupes de travées que voici :

Indication des groupes de travées qui portent la surcharge.	Nombre des combinaisons de chaque groupe.
La poutre entière non surchargée......	1
La surcharge sur une seule travée......	n
La surcharge sur deux travées.........	$\frac{n(n-1)}{1.2}$
La surcharge sur trois travées.........	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$
....	....
La surcharge sur $(n-1)$ travées.........	n
La poutre entière surchargée..........	1

Toutes ces combinaisons réunies font un total

$$1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}+\ldots+n+1,$$

soit le développement, par la formule du binôme, de $(1+1)^n$. Il y aura donc 2^n surcharges différentes, si l'on comprend parmi les cas possibles celui où la surcharge ne porterait sur aucune travée, ou 2^n-1 en ne le comprenant pas, ce qui est évidemment indifférent pour le résultat des calculs sur la stabilité. Toutes ces combinaisons, considérées chacune isolément et abstraction faite de la charge permanente, donneront lieu à autant de moments de flexion, en un point quelconque de la fibre moyenne; et tous ces moments, comme on l'a déjà dit, varieront entre deux limites, l'une positive, l'autre négative. Le fait des deux limites de signe contraire se produira aussi bien quand on surchargera seulement des travées entières, que quand on pouvait surcharger des fractions quelconques; car tous les poids mis entre deux appuis consécutifs font naître des moments de signe déterminé, en tout point de la poutre extérieur à ces appuis, et ce signe change quand les poids franchissent un appui (n° 13); en surchargeant successivement deux travées contiguës on est donc sûr de faire changer le

signe du moment de flexion en tout point situé au dehors de ces travées (*).

Imaginons maintenant qu'en chaque point de la fibre moyenne on élève deux ordonnées, l'une en dessus, représentant la limite des moments positifs dont on vient de parler; l'autre en dessous, représentant la limite des moments négatifs; puis, qu'on prenne le lieu géométrique des points ainsi obtenus. On aura deux courbes, ou plutôt, comme on le verra ultérieurement, des contours mixtilignes : c'est ce que nous nommerons, suivant l'usage, les *courbes enveloppes des moments produits par la surcharge seule*. Le nom d'enveloppe doit rappeler que toute ordonnée représentative d'un moment produit par une surcharge quelconque (parmi celles que l'on peut avoir à considérer) tomberait à l'intérieur du contour.

Ces courbes enveloppes ne sont pas précisément celles dont on a besoin dans la pratique pour vérifier la stabilité de la poutre. La charge permanente, en effet, agit toujours simultanément avec toute combinaison de surcharge, et les deux effets partiels doivent se cumuler algébriquement, suivant le théorème général rappelé au n° 5. Si donc on construisait une troisième courbe dont les ordonnées représenteraient les moments produits par la charge permanente seule, et qu'on fît, pour chaque point, la somme algébrique de ses ordonnées et de celles qui appartiennent à l'une ou l'autre des deux courbes déjà construites, on en obtiendrait deux autres qui seraient *les courbes enveloppes des moments produits par l'action simultanée de la charge permanente et des surcharges.*

(*) Cette démonstration exige qu'il y ait au moins deux travées, soit à droite, soit à gauche de celle où l'on cherche les limites des moments fléchissants : elle serait donc en défaut pour la poutre à deux travées, et pour la travée centrale de la poutre à trois travées. Il serait facile de la compléter dans ce dernier cas; dans le premier, on ne pourrait le faire que partiellement. Nous ne croyons pas devoir nous arrêter à ces détails, d'abord parce que le fait énoncé importe assez peu, au fond, pour la suite de nos raisonnements; ensuite parce que, à la rigueur, on peut le rendre toujours vrai en considérant une surcharge nulle, produisant partout des moments nuls, auxquels on peut indifféremment attribuer le signe + ou le signe —, sans qu'il puisse en résulter ici aucune erreur. Si donc on avait en certains points d'une poutre à deux travées des moments toujours positifs (ce qui peut arriver), un moment nul jouerait le rôle de la limite négative.



Les ordonnées des deux premières courbes étaient toujours de signe contraire; mais comme, pour en déduire celles de la quatrième et de la cinquième, on leur a ajouté une même quantité, ces dernières pourront être tantôt de même signe, tantôt de signes contraires. Si le second cas se présentait et s'il s'agissait d'une poutre à section non symétrique relativement à l'axe de flexion, il faudrait les connaître toutes deux; mais si elles ont un même signe, ou bien si la symétrie existe, il suffit de connaître la plus grande des deux en valeur absolue (*). C'est ce qui arrivera le plus ordinairement. Il faut donc concevoir une sixième courbe représentant les moments limites en valeur absolue.

Voyons actuellement si les six courbes n'auraient pas entre elles d'autres relations que celles qui résultent explicitement de leur définition même. Nous ferons à cet égard les remarques suivantes, toutes fort simples, mais cependant très-importantes.

Quand on veut avoir, pour un point M, la limite positive des moments de flexion dus à la surcharge seule, on doit supposer l'action simultanée de toutes les surcharges partielles sur une travée unique, qui, considérées isolément, produiraient au point M un moment positif; de même, l'action simultanée des surcharges qui produiraient isolément des moments négatifs au même point fournira la limite negative. La réunion de ces deux combinaisons forme évidemment la surcharge sur la longueur entière de la poutre.

Nous appelons *surcharges complémentaires* celles qui réunies occupent toute la longueur de la poutre, sans se doubler d'ailleurs sur aucune travée. Ainsi, quand toute la poutre supporte un poids uniforme de p' kilogrammes par mètre courant, si l'on enlève ce poids d'un certain nombre de travées, le poids qui reste (abstraction faite de la charge permanente) et celui qu'on a ôté sont deux surcharges complémentaires. Moyennant cette définition, et en ne considérant toujours que les moments dus à la surcharge seule, on peut dire que *si une certaine*

(*) *Voir* notre *Cours de Résistance des Matériaux*, chap. III, § 3, p. 191 et suiv.

surcharge donne, pour un point de la poutre, la limite positive des moments, la surcharge complémentaire donne l'autre limite. De là il suit immédiatement, en vertu du théorème sur la superposition des effets (n° 5), que *la somme algébrique des deux limites en chaque point est égale au moment fléchissant produit par un poids uniformément réparti sur la poutre entière, le poids par mètre courant étant celui de la surcharge.*

Lorsque le poids par mètre courant d'une certaine charge ou surcharge varie seul, la distribution restant d'ailleurs la même, le théorème sur la superposition montre de suite que les moments de flexion varient proportionnellement. Donc, *en multipliant par $\frac{p}{p'}$ la somme algébrique des deux moments fléchissants limites dus à la surcharge seule, on aura le moment dû à la charge permanente.*

Pour exprimer algébriquement ce résultat, nommons :

X le moment fléchissant en un point quelconque, sous la seule action de la charge permanente, dont le poids par mètre courant est p;

X′, X″ les limites positive et négative des moments fléchissants, pour le même point, quand on ne fait agir que la surcharge de p' kilogrammes par mètre.

Alors on aura

$$X = (X' + X'') \frac{p}{p'}. \tag{1}$$

La connaissance des deux premières courbes enveloppes entraîne donc celle de la troisième courbe, et par suite celle des quatrième, cinquième et sixième, en vertu des définitions mêmes. Mais il y a plus. L'ordonnée de la sixième courbe s'obtient en choisissant la plus forte valeur absolue entre les deux sommes algébriques

$$X + X', \quad X + X'';$$

or je dis qu'on n'aura jamais besoin d'effectuer numériquement la comparaison, et qu'on saura toujours d'avance, sans incertitude, celle des deux que l'on doit prendre. En effet,

d'après l'équation (1), on a pour les valeurs des sommes algébriques dont il s'agit :

$$X + X' = X' + (X' + X'')\frac{p}{p'},$$

$$X + X'' = X'' + (X' + X'')\frac{p}{p'};$$

d'un autre côté $X' + X''$ prend le signe de X' ou celui de X'', suivant que le premier de ces moments l'emporte sur l'autre en valeur absolue, ou lui est inférieur. Donc, si X' dépasse X'', abstraction faite du signe, $X + X'$ l'emportera de même sur $X + X''$; car, dans la première somme, les deux termes ont même signe et sont, l'un égal, l'autre plus grand arithmétiquement, devant les termes homologues de la seconde. Le contraire arriverait si la valeur absolue de X'' l'emportait sur celle de X'. Dans tous les cas on voit que :

La limite en valeur absolue des moments de flexion, pour un point quelconque de la poutre, est égale à la somme des valeurs absolues que prennent en ce point : 1° le moment de flexion produit X *par la charge permanente; 2° celui des deux moments limites* X', X'', *dont le signe est le même que celui du moment* X.

Tout se réduit donc à la recherche des limites X', X'', que nous allons bientôt entreprendre. Nous avons besoin auparavant de rappeler, avec quelques développements utiles pour la question actuelle, diverses propositions démontrées dans les §§ II et III.

25. *Moments fléchissants produits, dans une travée déterminée, par la surcharge d'une travée unique, de rang quelconque.* — Considérons toujours une poutre à $n+1$ appuis désignés par

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3,\ldots,\quad A_{n-1},\quad A_n;$$

supposons qu'une surcharge de p' kilogrammes par mètre courant agisse successivement sur chaque travée, en couvrant toute sa longueur; nous aurons ainsi n cas particuliers de surcharge, que nous distinguerons entre eux par des numéros

identiques à ceux des travées surchargées, comme il suit :

surcharge sur	A_0A_1......	cas n° 1,
»	A_1A_2.	cas n° 2,
»	A_2A_3......	cas n° 3,
»	....	.......,
»	$A_{n-1}A_n$....	cas n° n.

Prenons maintenant une travée $A_{m-1}A_m$, et voyons ce que doivent y être les moments de flexion dans chacun de ces n cas particuliers, en faisant abstraction de la charge permanente.

Il est clair qu'on arrivera toujours à les déterminer par les formules et procédés du § III, puisqu'on a une charge uniforme sur une seule travée; il n'y aura qu'à changer p en p'. Supposons d'abord un cas dont le numéro diffère de m; ce sera celui qu'on a étudié au n° 19. On se rappelle que les moments de flexion dans $A_{m-1}A_m$ sont, pour chaque cas, une fonction linéaire de l'abscisse, c'est-à-dire que leur ligne représentative est une ligne droite. Si l'on nomme :

X_{m-1} et X_m les moments de flexion sur les appuis A_{m-1} et A_m;

a la longueur de la travée;

x la distance d'un point quelconque de $A_{m-1}A_m$ à l'origine A_{m-1};

β et γ les deux nombres ainsi désignés au n° 9, se rapportant spécialement à la travée $A_{m-1}A_m$;

La fonction linéaire dont il s'agit sera (n° 1), attendu que $\varphi(x)=0$,

$$X_{m-1}+(X_m-X_{m-1})\frac{x}{a};$$

le rapport de X_{m-1} à X_m sera d'ailleurs $-\beta$ ou $-\frac{1}{\gamma}$, suivant que le cas particulier de surcharge aura un numéro k plus grand ou plus petit que m. Les $n-1$ droites représentatives de l'expression précédente forment donc deux faisceaux concourants en deux sommets B et C (*fig.* 6, *Pl. A, à la fin du volume*), dont les distances respectives aux appuis A_{m-1}, A_m ont pour valeur

$$\overline{A_{m-1}B}=\frac{a\beta}{1+\beta},\quad \overline{A_mC}=\frac{a\gamma}{1+\gamma};$$

le sommet B se rapporte à $k > m$, le sommet C à $k < m$. Les diverses droites portent d'ailleurs sur la figure des indices qui nous serviront à les désigner, et qui ne sont autres que les cas de surcharge correspondants.

Quand on surchargera la $(m+1)^{ième}$ travée, il y aura en A_m un moment de flexion positif, de sorte que la droite $m+1$ aura ses ordonnées positives dans l'intervalle $A_m B$, négatives dans l'intervalle BA_{m-1}. Pour les droites

$$m+3,\quad m+5,\quad m+7,\quad m+9,\ldots,$$

ce sera la même chose, car on sait que si la charge varie de position hors d'une travée, les moments de cette travée changent de signe toutes les fois qu'elle franchit un nouvel appui, d'où il suit que le signe reste le même quand elle en franchit deux. Au contraire, et par la même raison, les droites

$$m+2,\quad m+4,\quad m+6,\quad m+8,\ldots$$

auront leurs ordonnées négatives dans l'intervalle $A_m B$, positives dans BA_{m-1}. On reconnaîtra d'une manière toute semblable que les droites

$$m-1,\quad m-3,\quad m-5,\quad m-7,\ldots$$

ont des ordonnées positives dans l'intervalle $A_{m-1}C$, négatives dans CA_m, et que l'inverse a lieu pour les droites

$$m-2,\quad m-4,\quad m-6,\quad m-8,\ldots.$$

Les situations qu'on vient d'indiquer pour les diverses droites sont représentées dans la *fig.* 6. Nous ne nous sommes d'ailleurs nullement préoccupé des relations de grandeur que peuvent avoir les ordonnées relatives aux différents cas, et il serait inutile d'en parler ici.

Il ne nous reste plus à mentionner que le $m^{ième}$ cas de surcharge, c'est-à-dire celui où la travée $A_{m-1}A_m$ elle-même est surchargée. Nous avons étudié ce cas en détail au n° 20. On a vu que l'expression linéaire du moment de flexion doit être remplacée par l'expression entière et du second degré

$$X_{m-1} + (X_m - X_{m-1})\frac{x}{a} - \frac{1}{2}p'x(a-x).$$

La ligne représentative devient alors une parabole désignée par la lettre *m* sur la *fig.* 6; ses ordonnées sont positives en A_{m-1} et A_m; elle coupe toujours l'axe des abscisses en deux points réels D et F, situés, le premier dans l'intervalle $A_{m-1}B$, le second dans l'intervalle A_mC.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder d'une manière tout à fait générale la recherche des moments de flexion limites X', X", qui peuvent avoir lieu dans la travée $A_{m-1}A_m$, lorsqu'on suppose possibles toutes les combinaisons, en nombre quelconque, des *n* surcharges élémentaires qu'on vient de considérer. Dans cette recherche, la division des droites représentatives en deux faisceaux, la situation de la parabole et des droites relativement à l'axe des abscisses, l'ordre dans lequel se succèdent les points D, B, C, F ont une importance capitale, et c'est pour cela que nous avons cru nécessaire d'y revenir.

26. *Recherche générale des courbes enveloppes des moments dans une travée déterminée, sous l'action de la surcharge seule.* — Ces courbes se déduisent bien simplement des propositions rappelées au numéro précédent, combinées avec le théorème sur la superposition des effets des forces (nº 5).

Supposons, par exemple, qu'après avoir choisi arbitrairement une travée $A_{m-1}A_m$, et construit les *n* lignes représentatives des moments de flexion dus aux *n* surcharges sur une seule travée, on veuille avoir la limite positive X', ou, ce qui revient au même, sa courbe enveloppe, entre A_{m-1} et A_m. On partira de l'appui A_{m-1}; on prendra en ce point l'ordonnée $\overline{A_{m-1}E}$ de la parabole *m* (*fig.* 6), et l'on y joindra toutes les ordonnées positives

$$\overline{A_{m-1}E'},\ \overline{A_{m-1}E''},\ \overline{A_{m-1}E'''},\ldots,$$
$$\overline{A_{m-1}e'},\ \overline{A_{m-1}e''},\ \overline{A_{m-1}e'''},\ldots,$$

des droites composant les deux faisceaux. L'addition de toutes ces ordonnées fournit la limite X' en A_{m-1} : le moment X' ainsi obtenu se produirait, en effet, par la réunion des sur-

charges isolées qui ont donné lieu aux divers termes de la somme; et toute autre combinaison répondrait à un moment positif moindre, puisque la modification aurait pour effet nécessaire, soit de supprimer dans cette somme certains termes positifs, soit de lui adjoindre des termes négatifs. Lorsqu'on marchera ensuite suivant l'axe $A_{m-1}A_m$, il est clair que les ordonnées des mêmes lignes, cumulées entre elles, donneront encore la limite X′, jusqu'à ce qu'on arrive au premier point où l'axe $A_{m-1}A_m$ est coupé par l'une quelconque des n lignes représentatives. Il y aura là, en effet, un passage du positif au négatif, si la ligne sécante est une de celles déjà employées, ou un passage inverse si cette ligne était négative près de A_{m-1} : dans le premier cas, il faudrait supprimer son ordonnée à partir de son intersection avec $A_{m-1}A_m$; dans le second, il faudrait au contraire l'ajouter. Partant de cette intersection, on ira de même jusqu'à la plus voisine, en suivant l'axe des abscisses; là encore il y aura introduction d'une nouvelle ligne ou suppression d'une ligne précédemment employée. Et ainsi de suite, de proche en proche, on marcherait en cumulant toujours toutes les ordonnées positives; de plus, comme on saurait à quelles lignes appartiennent ces ordonnées, on pourrait avoir, non-seulement leur somme déterminée graphiquement, mais encore son expression algébrique en chaque point (c'est-à-dire les équations successives des courbes ou droites formant le contour enveloppe), en même temps que les combinaisons correspondantes de surcharge.

On procéderait de même à l'égard de la limite négative X″, qui répond toujours, comme on sait, à la surcharge *complémentaire* (n° 24) de celle qui engendre la limite positive X′ (*).

Il est facile maintenant d'indiquer d'avance, pour chaque point de la travée, les combinaisons de surcharge auxquelles

(*) L'idée, très-heureuse suivant nous, de déterminer les limites X′ et X″ en commençant par chercher les lignes représentatives des moments produits par la surcharge successive de chacune des n travées, puis cumulant en chaque point, soit toutes les ordonnées positives, soit toutes les ordonnées négatives, a été émise pour la première fois, à notre connaissance, dans un concours de Mécanique appliquée, par M. Maurice Lévy, alors élève ingénieur des Ponts et Chaussées. Il s'est d'ailleurs borné à l'exposer en termes succincts et à en faire

répond une des deux limites, X' par exemple. Remarquons, en effet, qu'il y a seulement quatre points d'intersection des lignes droites et parabole représentatives (*fig.* 6) avec $A_{m-1}A_m$, savoir : D, B, C, F. Nommons x', x'', x''', x^{iv} leurs distances respectives à A_{m-1}, ainsi rangées par ordre de grandeur : x' et x^{iv} sont données par la formule (5) du n° 20, et l'on a

$$x'' = \overline{A_{m-1}A_m}\,\frac{\beta}{1+\beta}, \quad x''' = \overline{A_{m-1}A_m}\left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right),$$

les nombres β et γ étant ceux qui dans leurs séries (n° 9) appartiennent spécialement à la travée considérée. Soit enfin x la distance d'un point quelconque de $A_{m-1}A_m$ à la même origine A_{m-1}. Cela posé, la seule vue de la *fig.* 6 suffit pour justifier les énoncés suivants :

1° De $x=0$ à $x=x'$, la surcharge qui donne la limite positive X' sera composée de la surcharge sur la $m^{\text{ième}}$ travée $A_{m-1}A_m$ dont on s'occupe, et sur les travées portant les numéros

$m-1$, $m-3$, $m-5, \ldots$, jusqu'à épuisement de m;
$m+2$, $m+4$, $m+6, \ldots$, jusqu'à n ou $n-1$.

Autrement dit, *on doit surcharger les deux travées qui se rejoignent à l'appui d'où l'on part, et toutes les autres de deux en deux.*

2° De $x=x'$ à $x=x''$, il faut conserver les mêmes droites, mais supprimer la parabole; donc *c'est la même combinaison de surcharge, sauf qu'on enlève celle de la travée dont on s'occupe.*

3° De x'' à x''', toutes les droites, déjà employées, du premier faisceau ayant B pour sommet, ont passé au-dessous de l'axe et doivent être remplacées par celles du même faisceau qu'on avait d'abord laissées de côté. Il faut donc modifier la combinaison précédente (2°) en ce sens que la surcharge sera

---

l'application au problème numérique dont on lui demandait la solution. Les positions respectives de la parabole m (*fig.* 6) et des droites, la division de celles-ci en deux faisceaux concourants, et généralement tous les faits signalés au n° 25 ne paraissent pas avoir attiré son attention, non plus que les conséquences déduites dans la suite du n° 26.

rapprochée d'une travée sur toute la portion à droite de $A_{m-1}A_m$, c'est-à-dire qu'elle sera ôtée des travées numérotées

$$m+2,\quad m+4,\quad m+6,\quad m+8,\ldots,\quad \text{jusqu'à } n \text{ ou } n-1,$$

pour être mise sur les travées

$$m+1,\quad m+3,\quad m+5,\quad m+7,\ldots,\quad \text{jusqu'à } n-1 \text{ ou } n.$$

La surcharge restant d'ailleurs la même à gauche de $A_{m-1}A_m$, on voit, en définitive, qu'*il faut surcharger de deux en deux toutes les travées de la poutre, en ayant soin de laisser vide celle dont on s'occupe.*

4° De $x=x'''$ à $x=x^{\text{IV}}$, toutes les droites du second faisceau (sommet C) déjà employées doivent être remplacées par les autres qui appartiennent au même faisceau et n'ont pas encore servi. La combinaison précédente de surcharge (3°) est donc changée en ce qu'il faut décharger les travées n^{os}

$$m-1,\quad m-3,\quad m-5,\quad m-7,\ldots,\quad \text{jusqu'à } 0 \text{ ou } 1,$$

pour surcharger les travées n^{os}

$$m-2,\quad m-4,\quad m-6,\quad m-8,\ldots,\quad \text{jusqu'à } 1 \text{ ou } 0.$$

Cela revient en somme *à laisser vides la travée dont on s'occupe et sa voisine à gauche, et à charger les deux travées contiguës à ce vide, ainsi que toutes les autres, de deux en deux.* Plus simplement, on peut remarquer que l'intervalle CF est dans une position tout à fait analogue à celle de l'intervalle BD, qu'on a étudié plus haut (2°) : par application de la règle énoncée à cette occasion, nous dirons qu'*il faut modifier la combinaison suivante de surcharge* (5°), *en déchargeant la travée dont on s'occupe.*

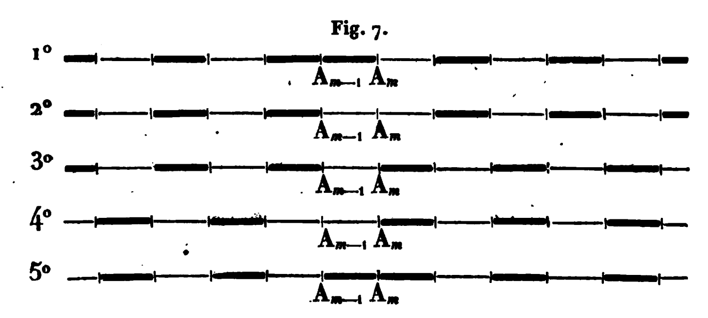
5° De $x=x^{\text{IV}}$ à $x=a=\overline{A_{m-1}A_m}$, la parabole m ayant coupé l'axe des abscisses redevient positive et doit être rétablie, en surplus de la combinaison précédente. On a ainsi la surcharge sur la $m^{\text{ième}}$ travée $A_{m-1}A_m$, et sur celles qui portent les n^{os}

$$m+1,\quad m+3,\quad m+5,\ldots,\quad \text{jusqu'à } n-1 \text{ ou } n,$$
$$m-2,\quad m-4,\quad m-6,\ldots,\quad \text{jusqu'à épuisement de } m.$$

C'est-à-dire que, comme en A_{m-1}, *il faut surcharger les deux travées attenantes à l'appui A_m, et les autres de deux en deux.*

La figure suivante rend ces résultats sensibles aux yeux; les travées surchargées y sont marquées par un trait plus fort.

Fig. 7.



On remarquera que les surcharges 1° et 4° d'une part, 2° et 5° d'autre part, forment des groupes complémentaires. Donc, lorsqu'il s'agira de déterminer la limite négative X″ (qui répond, comme on l'a déjà dit, aux combinaisons complémentaires de celles qu'on vient d'étudier), la quatrième combinaison ci-dessus remplacera la première depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x'$, et le remplacement inverse aura lieu de $x = x'''$ à $x = x^{\text{IV}}$; entre $x = x'$ et $x = x''$, il y aura de même substitution de la cinquième combinaison à la deuxième, et substitution inverse entre $x = x^{\text{IV}}$ et $x = a$. Enfin la troisième combinaison sera remplacée par une autre dans laquelle on aurait encore surchargé toutes les travées de deux en deux, la travée dont on s'occupe figurant parmi celles qui portent la surcharge.

De là résulte immédiatement le corollaire suivant :

La courbe représentative de la limite X′ dans le premier intervalle (de $x = 0$ à $x = x'$) et celle de la limite X″ dans le quatrième (de $x = x'''$ à $x = x^{\text{IV}}$) répondent à des surcharges identiques; elles sont donc des arcs d'une seule et même courbe, et ont même équation. On peut dans cet énoncé permuter X′ avec X″.

La même relation existe entre la limite X′ du second intervalle (de $x = x'$ à $x = x''$) et la limite X″ du cinquième (de $x = x^{\text{IV}}$ à $x = a$).

Ainsi donc les dix fonctions de x par lesquelles on pourrait exprimer les deux limites X′ et X″ dans les cinq intervalles que terminent les valeurs particulières o, x', x'', x''', x^{IV}, a de l'abscisse, sont loin d'être indépendantes les unes des autres. Le corollaire ci-dessus établit déjà entre elles quatre relations d'identité; mais ce n'est pas tout. On a vu (n° 24) que la somme $X'+X''$ doit reproduire, sauf le facteur $\frac{p}{p'}$, le moment X dû à la charge permanente; or, celui-ci est une fonction continue de x, qui ne change pas de forme dans toute l'étendue de la travée, comme le montre la formule (4) du n° 1, dans laquelle on doit faire $\varphi(x) = -\frac{1}{2}px(a-x)$: donc la somme $X'+X''$ doit rester la même fonction de x dans les cinq intervalles. Cela semble faire cinq nouvelles relations, mais deux sont des conséquences des quatre premières, et dans les cinq dernières figure une nouvelle inconnue X, de sorte qu'il y a finalement sept relations distinctes, et quatre fonctions à déterminer par des relations différentes. Quand on connaîtra ces quatre fonctions, on en déduira facilement les autres.

Employons, pour rendre cela plus clair, la concision du langage algébrique. Soient

$$p'f_1(x),\quad p'f_2(x),\quad p'f_3(x),\quad p'f_4(x),\quad p'f_5(x),$$
$$p'\psi_1(x),\quad p'\psi_2(x),\quad p'\psi_3(x),\quad p'\psi_4(x),\quad p'\psi_5(x),$$

les dix fonctions qui représentent respectivement X′ et X″ dans les cinq intervalles, la première ligne étant pour X′ et l'autre pour X″; nommons encore $p\mathrm{F}(x)$ la fonction unique exprimant le moment X dans la travée entière. Alors on aura :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1(x)+\psi_1(x)=\mathrm{F}(x),\\ f_2(x)+\psi_2(x)=\mathrm{F}(x),\\ f_3(x)+\psi_3(x)=\mathrm{F}(x),\\ f_4(x)+\psi_4(x)=\mathrm{F}(x),\\ f_5(x)+\psi_5(x)=\mathrm{F}(x),\\ \\ f_1(x)=\psi_4(x),\\ \psi_1(x)=f_4(x),\\ f_2(x)=\psi_5(x),\\ \psi_2(x)=f_5(x). \end{array}\right.$$

Voici neuf relations : mais l'élimination de $F(x)$ entre la première et la quatrième, puis entre la seconde et la cinquième, donne

$$f_1(x)+\psi_1(x)=f_4(x)+\psi_4(x),$$
$$f_2(x)+\psi_2(x)=f_5(x)+\psi_5(x),$$

ce que l'on obtient aussi par l'addition membre à membre de la sixième avec la septième, et de la huitième avec la neuvième. Il n'y a donc bien que sept relations distinctes qui font connaître les onze fonctions quand on en a déjà calculé quatre.

Il y a plusieurs manières, également bonnes suivant nous, de choisir ces quatre fonctions inconnues : on pourrait prendre, par exemple, F, f_1, f_5 avec ψ_3 ou f_3; ou bien F, f_2, f_3, f_4; ou encore F, f_2, ψ_2, f_4, etc.; nous avons adopté, dans divers exemples qu'on verra par la suite, la combinaison F, f_1, ψ_3, f_5, sans avoir pour justifier ce choix aucune raison bien décisive. Une fois ces quatre fonctions déterminées, on poserait, pour compléter la solution,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2(x)=\psi_5(x)=F(x)-f_5(x), \\ f_3(x)=F(x)-\psi_3(x), \\ f_4(x)=\psi_1(x)=F(x)-f_1(x), \\ \psi_2(x)=f_5(x), \\ \psi_4(x)=f_1(x), \end{array} \right.$$

ce qui résulte immédiatement des relations (2) : comme on le voit, la détermination des sept dernières inconnues n'exige plus que trois soustractions.

Si l'on nomme généralement c et c' les quotients que donnent les moments en A_{m-1} et A_m divisés par p', on voit de suite par application de la formule (4) du n° 1, citée il y a un instant, que les fonctions f et ψ ont toujours l'une des formes

$$c+(c'-c)\frac{x}{a}-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}x^2,$$

$$c+(c'-c)\frac{x}{a},$$

la première s'appliquant aux combinaisons de surcharge qui

comprennent $A_{m-1}A_m$, et l'autre à celles qui ne la comprennent pas. En se reportant aux indications données plus haut sur les combinaisons à prendre dans chacun des cinq intervalles, on constate donc sans peine : 1° que $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_5(x)$ sont des fonctions linéaires; 2° que $f_1(x)$, $f_5(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$ se composent d'une partie linéaire à laquelle on ajoute le terme $+\frac{1}{2}x^2$. Donc la courbe enveloppe (ou plutôt polygone mixtiligne) X', dans la travée $A_{m-1}A_m$, se compose de deux arcs de parabole, commençant ou finissant aux appuis A_{m-1} et A_m, et de trois lignes droites, les intersections mutuelles de ces lignes ayant lieu aux abscisses x', x'', x''', x^{iv}. De plus, dans le polygone X", les lignes composantes sont également au nombre de cinq et se coupent sur les mêmes abscisses; les paraboles du premier correspondent à des lignes droites dans le second, et inversement. Enfin les cinq arcs de parabole appartenant à l'un ou l'autre des deux polygones, rapportés à leur sommet et à leur axe principal, auraient toujours la même équation $y = \frac{1}{2}p'x^2$, ce qui montre qu'ils sont tous pris sur des paraboles égales; comme ces paraboles ont une ordonnée rationnelle et du second degré en x, leurs axes principaux sont parallèles à l'axe des ordonnées.

Quant à $F(x)$, son expression contiendrait toujours le terme $\frac{1}{2}x^2$. La courbe représentative de X est donc une parabole, ne différant de celle qu'on vient de trouver que par le changement de p' en p.

Après avoir déterminé les moments X, X', X", il serait facile d'avoir, soit X + X' et X + X", soit la plus grande de ces deux sommes, en valeur absolue, laquelle est ordinairement la seule utile en pratique, comme on l'a dit au n° 24. Nous n'avons à ajouter maintenant aucun détail à ce qui a été exposé alors en termes généraux, et nous ne voyons pas de route plus brève pour arriver au but. Le problème des courbes enveloppes est en effet susceptible de se réduire à des termes très-précis, très-catégoriques et très-simples, quand on étudie séparément, d'une part, les moments produits par la surcharge, et, d'autre

part, ceux qui sont dus à la charge permanente, suivant la méthode que nous venons de développer; si l'on veut, au contraire, aborder de front et sans intermédiaire la recherche du plus grand moment, en valeur absolue, pour une section quelconque, tout devient complication et confusion; les cas particuliers se multiplient et s'entre-croisent, pour ainsi dire, au point de former un dédale où il est bien difficile de ne pas s'égarer.

27. *Même problème pour une travée de rive.* — Supposons que la travée $A_{m-1}A_m$, au lieu d'être quelconque, soit une travée extrême de la poutre, ce qui arrivera si l'on a $m = 1$ ou $m = n$; prenons, pour fixer les idées, $m = 1$. Alors la *fig.* 6 (*Pl. A, à la fin du volume*), va éprouver des simplifications notables; puisqu'il n'y a plus de travée à gauche de A_{m-1}, les droites du second faisceau, ayant C pour sommet, seront supprimées; le moment étant toujours nul en A_{m-1} ou A_0, les autres droites, ainsi que la parabole m, passeront en ce point, où se confondront par conséquent les intersections B et D. Ainsi, la figure prendra l'aspect indiqué dans la *fig.* 8, *Pl. A*, et les cinq intervalles considérés au n° 26 se réduisent à deux, A_0F, A_1F. Nous continuerons à nommer x^{IV} la distance $\overline{A_0F}$; on sait (n° 20) qu'elle est la fraction $1 - \frac{1}{2}\gamma$ de $\overline{A_0A_1}$, c'est-à-dire qu'on a

$$x^{\text{IV}} = a\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right).$$

Cela posé, x désignant encore la distance d'un point quelconque de la travée à l'appui A_0, on voit que :

1° De $x = 0$ à $x = x^{\text{IV}}$, il faut, pour avoir la limite positive X′, ajouter les ordonnées des droites n°s 2, 4, 6, 8, 10, ..., jusqu'à n ou $n - 1$, c'est-à-dire que *cette limite répond à la surcharge simultanée de toutes les travées de rang pair;*

2° De $x = x^{\text{IV}}$ à $x = \overline{A_0A_1} = a$, il faut prendre les ordonnées des mêmes droites, plus celles de la parabole 1, c'est-à-dire qu'*on doit surcharger les deux travées qui se rejoignent en* A_1, *et toutes les autres de deux en deux.*

En résumé, on constate qu'on peut suivre pour ces deux

intervalles la même règle que dans une travée quelconque, en traitant le premier comme on traitait précédemment le troisième ou le quatrième (au choix), et le second comme on traitait le dernier.

Voici la représentation graphique des surcharges qui donnent X′ dans la première travée : comme dans la *fig.* 7, les travées surchargées sont indiquées par des traits plus forts.

Fig. 9.

1° A_0 A_1

2° A_0 A_1

Si l'on veut maintenant avoir l'expression analytique des moments X, X′, X″, et qu'on nomme (ainsi qu'au n° 26) :

$p\,F(x)$ le moment X dans toute l'étendue de la travée,
$p'f_3(x)$, $p'f_5(x)$ la limite positive X′ pour les intervalles $\overline{A_0F}$, $\overline{FA_1}$,
$p'\psi_3(x)$, $p'\psi_5(x)$ les valeurs correspondantes de X″,

il n'y aura entre ces cinq fonctions inconnues que les relations

$$f_3(x)+\psi_3(x)=F(x),$$
$$f_5(x)+\psi_5(x)=F(x),$$

qui permettront d'en calculer deux quand on connaîtra les trois autres. C'est une fonction de moins à déterminer que dans le cas général.

Par analogie avec ce qui a été fait précédemment (n° 26), on peut rechercher d'abord, si l'on veut, les trois fonctions F, ψ_3, f_5 ; puis on en déduit

$$(4)\qquad \begin{cases} f_3(x)=F(x)-\psi_3(x), \\ \psi_5(x)=F(x)-f_5(x). \end{cases}$$

Toutes ces fonctions sont encore, d'ailleurs, linéaires ou paraboliques, ces dernières ayant $\frac{1}{2}x^2$ pour terme du second degré ; mais il y a cette différence avec le cas général, qu'elles doivent toutes s'annuler pour $x=0$.

28. *Observations au sujet des théorèmes précédents.* — L'en-

semble des propriétés établies dans le présent paragraphe, et surtout aux nos 26 et 27, nous paraît vraiment digne d'être remarqué. C'est un fait assez étonnant *à priori*, quand on n'en connaît pas encore la démonstration, que, quels que soient le nombre des travées d'une poutre et l'espacement relatif de ses appuis, le polygone mixtiligne représentatif des limites X', X" soit toujours composé d'une manière identique, d'une part dans les travées extrêmes, d'autre part dans toutes les travées intermédiaires. Les paraboles et lignes droites s'y succèdent toujours dans un même ordre, en même nombre, dans des intervalles parfaitement définis, et sont toujours produites par des surcharges embrassant des travées qui portent les mêmes numéros d'ordre.

Nous n'avons pas l'intention de présenter ces propriétés comme une découverte entièrement nouvelle : quelques ingénieurs, guidés par les résultats d'applications numériques particulières, ont pu en soupçonner quelques-unes ; M. Piarron de Mondésir, ingénieur des Ponts et Chaussées, attaché à la Compagnie des chemins de fer russes, en a énoncé une partie et en a donné une démonstration toute différente de la nôtre, dans son savant et utile ouvrage sur le *Calcul des ponts métalliques à poutres droites et continues* (*). Mais M. de Mondésir n'a pas signalé le rôle important des quatre points D, B, C, F, ni indiqué bien nettement les surcharges qui fournissent les moments limites dans deux des intervalles terminés par ces points ; de plus, tout en énonçant des théorèmes exacts, il a eu le tort d'en tirer des conséquences parfois contestables au point de vue de l'entière généralité. Par exemple il dit, page 26, que le maximum du moment de flexion sur un appui quelconque répond à la surcharge des deux travées contiguës à cet appui, et des autres travées de deux en deux. Or nous avons vu (no 26) que cette hypothèse donne bien le maximum *positif*, lequel, suivant le langage de l'Algèbre, est toujours plus grand que le maximum *négatif* ; ici nous sommes donc d'accord avec M. de Mondésir, moyennant l'interprétation convenable des mots. Mais nous cessons de l'être quand il dit un

(*) Paris, 1860.

peu plus loin, page 29, que la même combinaison de surcharge donne, aux environs de l'appui dont il s'agit, les moments auxquels il faut avoir égard dans les calculs de stabilité, c'est-à-dire ceux qui sont les plus grands *en valeur absolue*. Il peut arriver, en effet, que le maximum négatif l'emporte, abstraction faite du signe, sur le maximum positif; et si l'on tient à en avoir un exemple, nous citerons l'appui central d'un pont à quatre travées symétriques, dans lequel les travées du milieu auraient une longueur au plus égale aux 0,6 de celle des travées de rive. Sans doute c'est là une hypothèse qui ne se réalisera pas souvent; mais nous sommes en droit de l'opposer à un théorème donné sans restriction. La même objection, à peu près, pourrait être répétée pour la proposition énoncée par M. de Mondésir au sujet de la surcharge qui produit les plus grands moments vers le milieu d'une travée.

Nous pensons donc avoir apporté à cette théorie un perfectionnement notable, en la complétant et la mettant sous une forme rigoureuse, d'une généralité absolue. Cela ne nous empêche pas de reconnaître le mérite des propositions que nous venons de critiquer; car, si elles ne sont pas toujours vraies, du moins elles le sont ordinairement et avec les circonstances habituelles de la pratique, ce qui est déjà beaucoup. Peut-être même leur vérité constatée dans un certain nombre d'exemples a-t-elle été la cause d'une induction téméraire où leur auteur se sera laissé entraîner, car on est naturellement porté à se montrer trop facile sur la démonstration d'un résultat qu'on a maintes fois reconnu exact.

29. *Exemple numérique de la détermination des courbes enveloppes.* — La théorie développée dans le présent § IV est assez délicate et mérite d'être éclaircie par un exemple; cela aura d'ailleurs l'avantage de montrer quel est, à notre avis, l'ordre le plus convenable du calcul.

Soit donnée une poutre à cinq travées, dont les ouvertures sont prises tout à fait au hasard, savoir :

Première travée A_0A_1, allant de l'appui extrême A_0 à l'appui A_1, d'une longueur $a_1 = 40^m$;

Deuxième travée A_1A_2, d'une longueur $a_2 = 50^m$;

Troisième travée A_2A_3, d'une longueur $a_3 = 80^m$;

Quatrième travée A_3A_4, d'une longueur $a_4 = 64^m$;

Cinquième travée A_4A_5, d'une longueur $a_5 = 50^m$.

Les poids, par mètre courant, de charge permanente et de surcharge, désignés respectivement par p et p', resteront indéterminés et seront conservés comme facteurs littéraux dans les résultats.

Il faut, avant de procéder au calcul des moments fléchissants limites dans une section quelconque, s'occuper d'abord des séries numériques étudiées au nº 9. On pose à cet effet les groupes d'équations (1) et (2), en mettant pour a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 les valeurs ci-dessus, et l'on a

$$(5)\quad \begin{cases} 2u_1(40+50)+u_2.50=0, \\ u_1.50+2u_2(50+80)+u_3.80=0, \\ u_2.80+2u_3(80+64)+u_4.64=0, \\ u_3.64+2u_4(64+50)+u_5.50=0; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} 2v_1(50+64)+v_2.64=0, \\ v_1.64+2v_2(64+80)+v_3.80=0, \\ v_2.80+2v_3(80+50)+v_4.50=0, \\ v_3.50+2v_4(50+40)+v_5.40=0. \end{cases}$$

Quand on fait $u_1=v_1=1$, on tire facilement des équations (5):

$u_1=1$, $u_2=-3,6$, $u_3=11,075$, $u_4=-45,3375$, $u_5=192,563$;

des équations (6):

$v_1=1$, $v_2=-3,5625$, $v_3=12,025$, $v_4=-56,83$, $v_5=240,70375$.

Par suite, on peut former les séries

$$\beta_0=0, \qquad \gamma_0=0,$$

$$\beta_1=-\frac{u_1}{u_2}=0,277778, \qquad \gamma_1=-\frac{v_1}{v_2}=0,280702,$$

$$\beta_2=-\frac{u_2}{u_3}=0,325056, \qquad \gamma_2=-\frac{v_2}{v_3}=0,296258,$$

$$\beta_3=-\frac{u_3}{u_4}=0,244279, \qquad \gamma_3=-\frac{v_3}{v_4}=0,211596,$$

$$\beta_4=-\frac{u_4}{u_5}=0,235442, \qquad \gamma_4=-\frac{v_4}{v_5}=0,236099,$$

en bornant l'approximation à la sixième décimale.

Cela fait, nous rechercherons les moments de flexion qui se produisent aux quatre points d'appui intermédiaires, par la surcharge successive des cinq travées, chacune d'elles étant surchargée seule; ces moments une fois connus, nous pourrions en conclure ceux qui ont lieu en une section quelconque, sous les mêmes surcharges, et la question serait ainsi amenée au point que suppose l'explication générale par laquelle commence le nº 26. Afin de désigner commodément l'appui auquel se rapporte un moment et la surcharge correspondante, nous emploierons la notation X_m^k, c'est-à-dire la lettre X avec deux indices; celui du bas fera connaître le rang de l'appui, et celui du haut (qu'on se gardera de confondre avec un exposant) fera connaître la travée surchargée. Ainsi donc X_m^k voudra dire: *moment sur l'appui* A_m *quand on surcharge la* $k^{\text{ième}}$ *travée* $A_{k-1}A_k$. Pour désigner le moment au même point, sous les surcharges réunies des travées portant les nos $k, k', k'', \ldots$, nous écrirons

$$X_m^{kk'k''\ldots},$$

et le théorème sur la superposition des effets des forces (nº 5) nous apprend qu'on a l'égalité

$$(7) \qquad X_m^{kk'k''\ldots} = X_m^k + X_m^{k'} + X_m^{k''} + \ldots.$$

Les moments X_m^k se calculeront par les formules (1), (2) et (3) du nº 18, combinées avec les formules (16) et (17) du nº 10; on rencontrera ainsi les calculs suivants :

1º *La surcharge est sur la première travée* A_0A_1. — On fera

$$a = 40^m, \quad \beta = \beta_0 = 0, \quad \gamma = \gamma_4 = 0{,}236099,$$

et si l'on prend $100p'$ pour unité des moments, on aura, par la formule (3) du nº 18,

$$X_1^1 = 4\gamma = 0{,}944396;$$

puis la formule (17) du nº 10 donnera

$$X_2^1 = -\gamma_3 X_1^1 = -0{,}049958,$$
$$X_3^1 = \gamma_3\gamma_2 X_1^1 = -\gamma_2 X_2^1 = 0{,}014800,$$
$$X_4^1 = -\gamma_3\gamma_2\gamma_1 X_1^1 = -\gamma_1 X_3^1 = -0{,}004154.$$

2° *La surcharge est sur la seconde travée* A_1A_2. — On doit supposer dans les formules (1) et (2) du n° 18

$$a = 50^m,\quad \beta = \beta_1 = 0,277778,\quad \gamma = \gamma_3 = 0,211596;$$

l'unité pour les moments restant toujours $100p'$, on trouve alors

$$X_1^2 = \frac{1}{4}\cdot 25\,\frac{0,277778\,(1-0,211596)}{1-0,277778.0,211596} = 1,454232,$$

$$X_2^2 = \frac{1}{4}\cdot 25\,\frac{0,211596\,(1-0,277778)}{1-0,277778.0,211596} = 1,014765.$$

De ce dernier moment on déduit, par la formule (17) du n° 10,

$$X_3^2 = -\gamma_2 X_2^2 = -0,299362,$$

$$X_4^2 = \gamma_2\gamma_1 X_2^2 = -\gamma_1 X_3^2 = 0,084031.$$

3° *La surcharge est sur la troisième travée* A_2A_3. — On emploiera les mêmes formules (1) et (2), en y faisant

$$a = 80^m,\quad \beta = \beta_2 = 0,325056,\quad \gamma = \gamma_2 = 0,296258,$$

ce qui donnera (sauf le facteur $100p'$)

$$X_2^3 = 16\,\frac{0,325056\,(1-0,296258)}{1-0,325056.0,296258} = 4,048956,$$

$$X_3^3 = 16\,\frac{0,296258\,(1-0,325056)}{1-0,325056.0,296258} = 3,543819.$$

Par suite, les formules (16) et (17) du n° 10 conduisent à

$$X_1^3 = -\beta_1 X_2^3 = -1,124710,$$

$$X_4^3 = -\gamma_1 X_3^3 = -0,994757.$$

4° *La surcharge est sur la quatrième travée* A_3A_4. — On a ici

$$a = 64^m,\quad \beta = \beta_3 = 0,244279,\quad \gamma = \gamma_1 = 0,280702;$$

donc, par les mêmes formules, nous trouverons

$$X_3^4 = 10,24\,\frac{0,244279\,(1-0,280702)}{1-0,244279.0,280702} = 1,931722,$$

$$X_4^4 = 10,24\,\frac{0,280702\,(1-0,244279)}{1-0,244279.0,280702} = 2,332150,$$

$$X_2^4 = -\beta_2 X_3^4 = -0,627918,$$

$$X_1^4 = \beta_2\beta_1 X_3^4 = -\beta_1 X_2^4 = 0,174422.$$

5° *La surcharge est sur la cinquième travée.* — On a

$$a = 50^m, \quad \beta = \beta_4 = 0,235442, \quad \gamma = \gamma_0 = 0.$$

Le nombre β_4 est celui qui remplace γ dans la formule (3) du n° **18**, quand on regarde la dernière travée comme la première; donc

$$X_4^5 = \frac{1}{4} \cdot 25 \cdot 0,235442 = 1,471513.$$

La formule (16) du n° **10** donne ensuite

$$X_3^5 = -\beta_3 X_4^5 = -0,359460,$$
$$X_2^5 = \beta_3 \beta_2 X_4^5 = -\beta_2 X_3^5 = 0,116845,$$
$$X_1^5 = -\beta_3 \beta_2 \beta_1 X_4^5 = -\beta_1 X_2^5 = -0,032457.$$

Nous rappelons encore une fois que tous les moments dont on vient d'obtenir les valeurs numériques, sont évalués en prenant $100p'$ pour unité de moment. Ainsi, par exemple, le moment X_2^5 serait en réalité $11,6845p'$.

Pour compléter les renseignements qu'on a supposés préalablement acquis en commençant le n° **26**, on n'a plus qu'à chercher, dans les trois travées intermédiaires, les points analogues à D, B, C, F (*fig.* 6, *Pl. A, à la fin du volume*), et dans les deux travées extrêmes les points analogues à F (*fig.* 8). Dans chaque travée, nous compterons toujours les abscisses en partant de celle des deux extrémités de cette travée où est l'appui numéroté par l'indice le moins élevé. Nous trouverons alors, suivant les formules mentionnées aux n°s **26** et **27**, et en faisant usage des valeurs de a, β, γ déjà employées ci-dessus pour le calcul des moments X_m^k :

Première travée. — Abscisse du point F (*fig.* 8):

$$x^{\text{iv}} = a\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right) = 40 \cdot 0,88195 = 35^m,28;$$

Deuxième travée. — Abscisses des points (*fig.* 6)

$$\text{D} \ldots\ldots \quad x' = \frac{50}{2}\left(1,03511 - \sqrt{0,6048738}\right) = 6^m,43,$$

B...... $x'' = \frac{a\beta}{1+\beta} = \frac{50.0,277778}{1,277778} = 10^m,87,$

C...... $x''' = a - \frac{a\gamma}{1+\gamma} = 50 - \frac{50.0,211596}{1,211596} = 41^m,27,$

F...... $x^{iv} = \frac{50}{2}(1,03511 + \sqrt{0,6048738}) = 45^m,32;$

Troisième travée. — Abscisses des points

D...... $x' = \frac{80}{2}(1,01593 - \sqrt{0,5260342}) = 11^m,63,$

B...... $x'' = \frac{80.0,325056}{1,325056} = 19^m,63,$

C...... $x''' = 80 - \frac{80.0,296258}{1,296258} = 61^m,72,$

F...... $x^{iv} = \frac{80}{2}(1,01593 + \sqrt{0,5260342}) = 69^m,65;$

Quatrième travée. — Abscisses des points

D...... $x' = \frac{64}{2}(0,98045 - \sqrt{0,5839885}) = 6^m,92,$

B...... $x'' = \frac{64.0,244279}{1,244279} = 12^m,57,$

C...... $x''' = 64 - \frac{64.0,280702}{1,280702} = 49^m,97,$

F...... $x^{iv} = \frac{64}{2}(0,98045 + \sqrt{0,5839885}) = 55^m,83;$

Cinquième travée. — Abscisse du point F (*fig.* 8) :

$$x' = \frac{1}{2}a\beta = 25.0,235442 = 5^m,89.$$

Maintenant, au lieu de chercher les équations des diverses lignes droites et paraboles tracées dans les *fig.* 6 et 8, équations qui serviraient ensuite à trouver celles des contours enveloppes, nous allons calculer directement certains nombres qui doivent entrer dans ces dernières équations, comme on le verra tout à l'heure. Ces nombres sont :

1° Les moments de flexion qui se produisent sur tous les appuis, quand on surcharge :

Les travées de rang impair,

Les travées de rang pair,

La poutre entière;

2° Les moments de flexion qui se produisent sur chaque appui A_m et ses deux voisins, quand on surcharge les deux travées adjacentes à A_m, et les autres travées de deux en deux.

Tous les moments dont il s'agit ici rentrent évidemment dans l'expression générale $X_m^{kk'k''\ldots}$; l'équation (7) permet donc de les calculer par de simples additions, puisqu'on a déjà tous les moments X_m^k. Si, par exemple, on veut $X_3^{1.3.5}$ et $X_3^{2.4}$, on écrira

$$X_3^{1.3.5} = X_3^1 + X_3^3 + X_3^5 = 0{,}014800 + 3{,}543819 - 0{,}359460$$
$$= 3{,}199159,$$
$$X_3^{2.4} = X_3^2 + X_3^4 = -0{,}299262 + 1{,}931722 = 1{,}632360,$$

nombres qu'on devrait toujours, bien entendu, multiplier par $100p'$. On en déduirait

$$X_3^{1.2.3.4.5} = 3{,}199159 + 1{,}632360 = 4{,}831519,$$
$$X_3^{2.4.5} = 1{,}632360 - 0{,}359460 = 1{,}272900.$$

Par des moyens tout à fait analogues, on forme le tableau ci-dessous, que nous transcrivons sans donner d'autres exemples; les moments y sont exprimés par leurs rapports à $100p'$.

$X_1^{1.3.5} = -0{,}212771$, $X_1^{2.4} = 1{,}628654$, $X_1^{1.2.3.4.5} = 1{,}415883$,
$X_1^{1.2.4} = 2{,}573050$, $X_1^{2.3.5} = 0{,}297065$,

$X_2^{1.3.5} = 4{,}115843$, $X_2^{2.4} = 0{,}386847$, $X_2^{1.2.3.4.5} = 4{,}502690$,
$X_2^{1.2.4} = 0{,}336889$, $X_2^{2.3.5} = 5{,}180566$, $X_2^{1.3.4} = 3{,}371080$,

$X_3^{1.3.5} = 3{,}199159$, $X_3^{2.4} = 1{,}632360$, $X_3^{1.2.3.4.5} = 4{,}831519$,
$X_3^{2.3.5} = 2{,}884997$, $X_3^{1.3.4} = 5{,}490341$, $X_3^{2.4.5} = 1{,}272900$,

$X_4^{1.3.5} = 0{,}472602$, $X_4^{2.4} = 2{,}416181$, $X_4^{1.2.3.4.5} = 2{,}888783$,
$X_4^{1.3.4} = 1{,}333239$, $X_4^{2.4.5} = 3{,}887694$.

Il ne reste pour ainsi dire plus qu'à écrire, sans nouveau calcul, les équations des diverses lignes composant les courbes enveloppes des moments, ou, ce qui revient au même, les valeurs, dans chaque travée, des fonctions désignées en général par les lettres F, f, ψ (nos 26 et 27). Il suffira pour cela d'appliquer la formule déjà bien souvent citée

$$X = X_{n-1} + (X_n - X_{n-1})\frac{x}{a} - \frac{1}{2}px(a-x),$$

en mettant à chaque fois au lieu de a la longueur de la travée dont on s'occupe; au lieu de p le poids par mètre courant (qui sera, suivant les circonstances, p pour la charge permanente, p' pour la surcharge, o pour le cas où la travée serait supposée vide); au lieu de X_{n-1} et X_n les moments sur les appuis de la travée, répondant, soit à la charge permanente, soit à une certaine combinaison bien définie de surcharge, et connus au moyen du tableau précédent. C'est ce que nous allons faire.

La troisième colonne du tableau contient les moments sur les appuis, sous l'action d'une surcharge uniforme couvrant la longueur entière de la poutre, ou plutôt leurs rapports au facteur $100p'$. S'il s'agit de la charge permanente, il faudra évidemment multiplier les mêmes rapports par $100p$, ou simplement par le nombre 100, quand on voudra calculer $F(x)$ et non X. Ayant égard, en outre, à ce que les moments sont toujours nuls aux extrémités A_0 et A_5 de la poutre, on trouvera, par la formule qu'on vient de rappeler :

Première travée.

$$0,01\,F(x) = 1,415883\,\frac{x}{40} - 0,005x(40-x)$$
$$= -0,16460x + 0,005x^2.$$

Deuxième travée.

$$0,01\,F(x) = 1,415883 + (4,502690 - 1,415883)\frac{x}{50}$$
$$-0,005x(50-x) = 1,41588 - 0,18826x + 0,005x^2.$$

Troisième travée.

$$0{,}01\,F(x) = 4{,}502690 + (4{,}831519 - 4{,}502690)\frac{x}{80}$$
$$- 0{,}005\,x(80 - x) = 4{,}50269 - 0{,}39589\,x + 0{,}005\,x^2.$$

Quatrième travée.

$$0{,}01\,F(x) = 4{,}831519 + (2{,}888783 - 4{,}831519)\frac{x}{64}$$
$$- 0{,}005\,x(64 - x) = 4{,}83152 - 0{,}35036\,x + 0{,}005\,x^2.$$

Cinquième travée.

$$0{,}01\,F(x) = 2{,}888783 - 2{,}888783\cdot\frac{x}{50} - 0{,}005\,x(50 - x)$$
$$= 2{,}88878 - 0{,}30778\,x + 0{,}005\,x^2.$$

Connaissant la fonction F, on n'a plus à déterminer que deux fonctions f ou ψ dans chaque travée de rive (n° 27), et trois dans chaque travée intermédiaire (n° 26); les autres s'en déduisent immédiatement. Voici le calcul de ces fonctions :

Dans la première travée, de $x = 0$ à $x = x^{\text{IV}} = 35^{\text{m}},28$, on sait que la limite négative X″ répond à la surcharge des travées n°s 1, 3 et 5 (nous dirons simplement : surcharge 1.3.5); il faut donc appliquer la même formule, en prenant $X_1^{1.3.5}$ dans la première colonne du tableau, et l'on trouve :

$$\frac{X''}{100\,p'} = 0{,}01\,\psi_3(x) = -0{,}212771\,\frac{x}{40} - 0{,}005\,x(40 - x)$$
$$= -0{,}20532\,x + 0{,}005\,x^2.$$

De $x = x^{\text{IV}} = 35^{\text{m}},28$ à $x = a = 40^{\text{m}}$, il faut prendre la surcharge 1.2.4 (première colonne du tableau), pour avoir la limite positive X′; donc

$$\frac{X'}{100\,p'} = 0{,}01\,f_1(x) = 2{,}573050\,\frac{x}{40} - 0{,}005\,x(40 - x)$$
$$= -0{,}13567\,x + 0{,}005\,x^2.$$

De là on déduit :

Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x^{\text{IV}} = 35^m,28$,

$$
\begin{aligned}
0{,}01 f_3(x) &= 0{,}01\,[F(x) - \psi_3(x)] \\
&= -0{,}16460x + 0{,}005x^2 + 0{,}20532x - 0{,}005x^2 \\
&= 0{,}04072x;
\end{aligned}
$$

Depuis $x = x^{\text{IV}} = 35^m,28$ jusqu'à $x = a = 40^m$,

$$
\begin{aligned}
0{,}01\,\psi_5(x) &= 0{,}01\,[F(x) - f_5(x)] \\
&= -0{,}16460x + 0{,}005x^2 + 0{,}13567x - 0{,}005x^2 \\
&= -0{,}02893x.
\end{aligned}
$$

Dans la seconde travée, entre $x = 0$ et $x = x' = 6^m,43$, c'est encore la surcharge 1.2.4 qui donne X'; on a donc

$$
\begin{aligned}
\frac{X'}{100p'} &= 0{,}01 f_1(x) \\
&= 2{,}573050 + (0{,}336889 - 2{,}573050)\frac{x}{50} - 0{,}005x(50 - x) \\
&= 2{,}57305 - 0{,}29472x + 0{,}005x^2.
\end{aligned}
$$

Un peu plus loin, entre $x = x'' = 10^m,87$ et $x = x''' = 41^m,27$, la limite X'' sera produite par la surcharge 2.4 (deuxième colonne du tableau); et par suite,

$$
\begin{aligned}
\frac{X''}{100p'} &= 0{,}01\,\psi_3(x) \\
&= 1{,}628654 + (0{,}386847 - 1{,}628654)\frac{x}{50} - 0{,}005x(50 - x) \\
&= 1{,}62865 - 0{,}27484x + 0{,}005x^2.
\end{aligned}
$$

Dans le voisinage de l'appui A_2, vers la fin de la même travée, entre $x = x^{\text{IV}} = 45^m,32$ et $x = a = 50^m$, on obtiendra X' en prenant la surcharge 2.3.5 (deuxième colonne du tableau); nous posons en conséquence

$$
\begin{aligned}
\frac{X'}{100p'} &= 0{,}01 f_5(x) \\
&= 0{,}297065 + (5{,}180566 - 0{,}297065)\frac{x}{50} - 0{,}005x(50 - x) \\
&= 0{,}29706 - 0{,}15233x + 0{,}005x^2.
\end{aligned}
$$

Retranchant ces trois premiers résultats de $0,01\,F(x)$, nous aurons respectivement dans les mêmes intervalles :

Depuis $x=0$ jusqu'à $x=x'=6^m,43$,

$$0,01\,\psi_1(x)=-1,15717+0,10646x;$$

Depuis $x=x''=10^m,87$ jusqu'à $x=x'''=41^m,27$,

$$0,01\,f_3(x)=-0,21277+0,08658x;$$

Depuis $x=x^{\text{IV}}=45^m,32$ jusqu'à $x=a=50^m$,

$$0,01\,\psi_5(x)=1,11881-0,03593x.$$

Enfin, les fonctions f et ψ portant les indices 2 et 4 sont identiques à des fonctions déjà connues; on a, en effet (n° 26) :

Depuis $x=x'=6^m,43$ jusqu'à $x=x''=10^m,87$,

$$0,01\,f_2(x)=0,01\,\psi_5(x)=1,11881-0,03593x,$$
$$0,01\,\psi_2(x)=0,01\,f_5(x)=0,29706-0,15233x+0,005x^2;$$

Depuis $x=x'''=41^m,27$ jusqu'à $x=x^{\text{IV}}=45^m,32$,

$$0,01\,f_4(x)=0,01\,\psi_1(x)=-1,15717+0,10646x,$$
$$0,01\,\psi_4(x)=0,01\,f_1(x)=2,57305-0,29472x+0,005x^2,$$

ce qui complète la détermination de toutes les fonctions F, f, ψ pour la seconde travée.

Il serait sans doute inutile de répéter les mêmes détails pour les travées suivantes : nous nous bornerons donc à indiquer les résultats.

Troisième travée.

Depuis $x=0$ jusqu'à $x=x'=11^m,63$,

$$0,01\,f_1(x)=5,18057-0,40869x+0,005x^2,$$
$$0,01\,\psi_1(x)=-0,67788+0,03280x;$$

Depuis $x=x'=11^m,63$ jusqu'à $x=x''=19^m,63$,

$$0,01\,f_2(x)=1,13161-0,02238x,$$
$$0,01\,\psi_2(x)=3,37108-0,37351x+0,005x^2;$$

Depuis $x = x'' = 19^m,63$ jusqu'à $x = x''' = 61^m,72$,

$$0,01 f_3(x) = 0,38685 + 0,01557 x,$$
$$0,01 \psi_3(x) = 4,11584 - 0,41146 x + 0,005 x^2;$$

Depuis $x = x''' = 61^m,72$ jusqu'à $x = x^{\text{IV}} = 69^m,65$,

$$0,01 f_4(x) = -0,67788 + 0,03280 x,$$
$$0,01 \psi_4(x) = 5,18057 - 0,42869 x + 0,005 x^2;$$

Depuis $x = x^{\text{IV}} = 69^m,65$ jusqu'à $x = a = 80^m$,

$$0,01 f_5(x) = 3,37108 - 0,37351 x + 0,005 x^2,$$
$$0,01 \psi_5(x) = 1,13161 - 0,02238 x.$$

Quatrième travée.

Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x' = 6^m,92$,

$$0,01 f_1(x) = 5,49034 - 0,38495 x + 0,005 x^2,$$
$$0,01 \psi_1(x) = -0,65882 + 0,03459 x;$$

Depuis $x = x' = 6^m,92$ jusqu'à $x = x'' = 12^m,57$,

$$0,01 f_2(x) = 3,55862 - 0,07122 x,$$
$$0,01 \psi_2(x) = 1,27290 - 0,27914 x + 0,005 x^2;$$

Depuis $x = x'' = 12^m,57$ jusqu'à $x = x''' = 49^m,97$,

$$0,01 f_3(x) = 3,19916 - 0,04261 x,$$
$$0,01 \psi_3(x) = 1,63236 - 0,30775 x + 0,005 x^2;$$

Depuis $x = x''' = 49^m,97$ jusqu'à $x = x^{\text{IV}} = 55^m,83$,

$$0,01 f_4(x) = -0,65882 + 0,03459 x,$$
$$0,01 \psi_4(x) = 5,49034 - 0,38495 x + 0,005 x^2;$$

Depuis $x = x^{\text{IV}} = 55^m,83$ jusqu'à $x = a = 64^m$,

$$0,01 f_5(x) = 1,27290 - 0,27914 x + 0,005 x^2,$$
$$0,01 \psi_5(x) = 3,55862 - 0,07122 x.$$

Cinquième travée.

Depuis $x=0$ jusqu'à $x=x'=5^m,89$,

$$0,01 f_1(x)=3,88769-0,32775x+0,005x^2,$$
$$0,01\,\psi_1(x)=-0,99891+0,01997x;$$

Depuis $x=x'=5^m,89$ jusqu'à $x=a=50^m$,

$$0,01 f_3(x)=2,41618-0,04833x,$$
$$0,01\,\psi_3(x)=0,47260-0,25945x+0,005x^2.$$

On se rappelle que les fonctions f et ψ multipliées par p' donnent X′ et X″; de même X est égal à $p\mathrm{F}(x)$: ainsi, les moments limites X′, X″ sont, ainsi que X, maintenant connus dans toute l'étendue de la pièce.

Mais en pratique ce n'est pas précisément de ces quantités X, X′, X″ qu'on a besoin; c'est des sommes X + X′, X + X″, ou seulement de la plus grande des deux, en valeur absolue, dans le cas particulier d'une section symétrique. S'il fallait avoir les deux sommes, elles seraient maintenant bien aisées à calculer : nous supposerons donc qu'on veuille immédiatement choisir la plus grande, pour une section quelconque.

Afin d'atteindre ce but, on a dit au n° 24 qu'il fallait ajouter la valeur absolue de X avec celle des deux quantités X′ et X″ qui a le même signe que X. Le signe de X′ est toujours +, celui de X″ toujours —, comme il est aisé de s'en assurer, et comme on le sait d'avance (n° 24) : il faut donc chercher le signe de X ou de F(x), ce qui exige qu'on détermine les points où F(x) s'annule. Cela ne présente pas de difficulté, puisque F(x) est partout exprimée par un trinôme algébrique et rationnel du second degré : on trouve, en posant, pour chaque travée, l'équation

$$\mathrm{F}(x)=0,$$

qu'elle est satisfaite par deux valeurs x_1, x_2, de x, dont voici le tableau :

Première travée.....	$x_1=0$,	$x_2=32^m,92$;
Deuxième travée.....	$x_1=10^m,39$,	$x_2=27^m,27$;

8.

Troisième travée..... $x_1 = 13^m,77$, $x_2 = 65^m,41$;
Quatrième travée..... $x_1 = 18^m,87$, $x_2 = 51^m,20$;
Cinquième travée..... $x_1 = 11^m,56$, $x_2 = 50^m$.

En examinant les cinq expressions de $F(x)$, on voit qu'elles représentent toutes une parabole de même paramètre, ayant sa concavité tournée vers les ordonnées positives : donc $F(x)$ est négative dans l'intervalle (ou plutôt dans les cinq intervalles) compris entre $x = x_1$ et $x = x_2$; elle est positive partout ailleurs. Ainsi donc, dans chaque travée, il faudra prendre :

$X + X'$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x_1$, et depuis $x = x_2$ jusqu'à $x = a$;

$X + X''$, ou mieux $-X - X''$ (pour écrire la valeur absolue), entre $x = x_1$ et $x = x_2$.

Il est bien entendu d'ailleurs que dans l'un quelconque de ces intervalles, on aura égard au changement de forme de la fonction f ou ψ, qui, multipliée par p', donne X' ou X''.

Nommons X''' la plus grande valeur absolue qu'il s'agit de déterminer. En opérant comme il vient d'être dit, on trouvera :

Première travée.

Depuis $x = x_1 = 0$ jusqu'à $x = x_2 = 32^m,92$,

$$X''' = (16,460p + 20,532p')x - \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Depuis $x = x_2 = 32^m,92$ jusqu'à $x = x^{IV} = 35^m,28$,

$$X''' = (-16,460p + 4,072p')x + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = x^{IV} = 35^m,28$ jusqu'à $x = a = 40^m$,

$$X''' = -(16,460p + 13,567p')x + \frac{1}{2}(p + p')x^2.$$

Deuxième travée.

Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x' = 6^m,43$,

$$X''' = 141,588p + 257,305p' - (18,826p + 29,472p')x + \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Depuis $x = x' = 6^m,43$ jusqu'à $x = x_1 = 10^m,39$,

$$X''' = 141,588p + 111,881p' - (18,826p + 3,593p')x + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = x_1 = 10^m,39$ jusqu'à $x = x'' = 10^m,87$,

$$X''' = -141,588p - 29,706p' + (18,826p + 15,233p')x - \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Depuis $x = x'' = 10^m,87$ jusqu'à $x = x_2 = 27^m,27$,

$$X''' = -141,588p - 162,865p' + (18,826p + 27,484p')x - \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Depuis $x = x_2 = 27^m,27$ jusqu'à $x = x''' = 41^m,27$,

$$X''' = 141,588p - 21,277p' - (18,826p - 8,658p')x + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = x''' = 41^m,27$ jusqu'à $x = x^{iv} = 45^m,32$,

$$X''' = 141,588p - 115,717p' - (18,826p - 10,646p')x + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = x^{iv} = 45^m,32$ jusqu'à $x = a = 50^m$,

$$X''' = 141,588p + 29,706p' - (18,826p + 15,233p')x + \frac{1}{2}(p + p')x^2.$$

Troisième travée.

Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x' = 11^m,63$,

$$X''' = 450,269p + 518,057p' - (39,589p + 42,869p')x + \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Depuis $x = x' = 11^m,63$ jusqu'à $x = x_1 = 13^m,77$,

$$X''' = 450,269p + 113,161p' - (39,589p + 2,238p')x + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = x_1 = 13^m,77$ jusqu'à $x = x'' = 19^m,63$,

$$X''' = -450,269p - 337,108p' + (39,589p + 37,351p')x - \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Depuis $x = x'' = 19^m,63$ jusqu'à $x = x''' = 61^m,72$,

$$X''' = -450,269p - 411,584p' + (39,589p + 41,146p')x - \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Depuis $x = x''' = 61^m,72$ jusqu'à $x = x_2 = 65^m,41$,

$$X''' = -450,269p - 518,057p' + (39,589p + 42,869p')x - \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Depuis $x = x_2 = 65^m,41$ jusqu'à $x = x^{IV} = 69^m,65$,

$$X''' = 450,269p - 67,788p' - (39,589p - 3,280p')x + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = x^{IV} = 69^m,65$ jusqu'à $x = a = 80^m$,

$$X''' = 450,269p + 337,108p' - (39,589p + 37,351p')x + \frac{1}{2}(p + p')x^2.$$

Quatrième travée.

Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x' = 6^m,92$,

$$X''' = 483,152p + 549,034p' - (35,036p + 38,495p')x + \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Depuis $x=x'=6^m,92$ jusqu'à $x=x''=12^m,57$,

$$X'''=483,152p+355,862p'$$
$$-(35,036p+7,122p')x+\frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x=x''=12^m,57$ jusqu'à $x=x_1=18^m,87$,

$$X'''=483,152p+319,916p'$$
$$-(35,036p+4,261p')x+\frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x=x_1=18^m,87$ jusqu'à $x=x'''=49^m,97$,

$$X'''=-483,152p-163,236p'$$
$$+(35,036p+30,775p')x-\frac{1}{2}(p+p')x^2;$$

Depuis $x=x'''=49^m,97$ jusqu'à $x=x_2=51^m,20$,

$$X'''=-483,152p-549,034p'$$
$$+(35,036p+38,495p')x-\frac{1}{2}(p+p')x^2;$$

Depuis $x=x_2=51^m,20$ jusqu'à $x=x^{IV}=55^m,83$,

$$X'''=483,152p-65,882p'$$
$$-(35,036p-3,459p')x+\frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x=x^{IV}=55^m,83$ jusqu'à $x=a=64^m$,

$$X'''=483,152p+127,290p'$$
$$-(35,036p+27,914p')x+\frac{1}{2}(p+p')x^2.$$

Cinquième travée.

Depuis $x=0$ jusqu'à $x=x'=5^m,89$,

$$X'''=288,878p+388,769p'$$
$$-(30,778p+32,775p')x+\frac{1}{2}(p+p')x^2;$$

Depuis $x = x' = 5^m,89$ jusqu'à $x = x_1 = 11^m,56$,

$$X''' = 288,878p + 241,618p' - (30,778p + 4,833p')x + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = x_1 = 11^m,56$ jusqu'à $x = a = 50^m$,

$$X''' = -288,878p - 47,260p' + (30,778p + 25,945p')x - \frac{1}{2}(p + p')x^2.$$

Si tous ces calculs devaient réellement servir à une application pratique, il y aurait encore lieu de rechercher les valeurs extrêmes de chacune de ces fonctions X''', pour les deux limites de x entre lesquelles elle représente le plus grand moment; dans l'intervalle de ces limites, il faudrait voir également si la fonction ne passe pas par un maximum. C'est une discussion qui ne saurait offrir la moindre difficulté, puisqu'il s'agit seulement de fonctions algébriques rationnelles et entières du second degré. Nous nous bornerons à chercher les maxima par lesquels passe X'''.

D'abord, en faisant $x = 0$ dans la première expression de X''', pour les deuxième, troisième, quatrième et cinquième travées, on a les valeurs de X''' sur les appuis, savoir :

En A_1...... $X''' = 141,588p + 257,305p'$,
En A_2...... $X''' = 450,269p + 518,057p'$,
En A_3...... $X''' = 483,152p + 549,034p'$,
En A_4...... $X''' = 288,878p + 388,769p'$.

Ce sont là quatre maxima; car, si l'on examine les diverses expressions de X''' applicables aux environs des quatre appuis intermédiaires, on voit qu'elles représentent toutes des paraboles dont la concavité est tournée vers le haut et dont le sommet ne sort pas de la travée correspondante; cela prouve bien que la courbe commence par descendre, à partir du point situé sur chacun de ces appuis. Mais ces maxima ne sont pas les seuls; il y en a d'autres vers le milieu des travées, et nous allons les indiquer en admettant qu'on ait successivement

$$p' = 0, \quad p = 0.$$

Si p' est nul, les maxima répondent, dans les cinq travées, à $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, abscisse dont la substitution donne les résultats que voici :

Première travée.....	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 16^m,46$,	$X''' = 135,466p$;
Deuxième travée....	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 18^m,83$,	$X''' = 35,621p$;
Troisième travée....	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 39^m,59$,	$X''' = 333,377p$;
Quatrième travée....	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 35^m,04$,	$X''' = 130,609p$;
Cinquième travée...	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 30^m,78$,	$X''' = 184,765p$.

Dans le second cas, où p' existe seul, X''' est exprimé, tantôt par des fonctions linéaires, tantôt par des fonctions paraboliques. Les dernières peuvent seules avoir des maxima dans l'intervalle des travées; quant aux valeurs extrêmes sur les appuis, il est inutile de les considérer, car elles seraient nécessairement inférieures à celles qu'on a déjà calculées. Parmi les maxima répondant à des sommets de paraboles, il y en a aussi un certain nombre à rejeter, parce que les sommets tombent hors des intervalles dans lesquels les paraboles correspondantes peuvent exprimer X'''; en sorte que finalement il ne reste que ceux dont voici le tableau :

Première travée.....	abscisse $20^m,53$,	$X''' = 210,782p'$;
Deuxième travée.....	abscisse $27^m,48$,	$X''' = 214,793p'$;
Troisième travée.....	abscisse $41^m,15$,	$X''' = 434,913p'$;
Quatrième travée....	abscisse $30^m,79$,	$X''' = 310,899p'$;
Cinquième travée....	abscisse $25^m,95$,	$X''' = 289,337p'$.

Le cas mixte, seul possible en réalité, où p et p' ont tous deux une valeur différente de zéro, donne lieu à des moments que l'on peut obtenir en faisant la somme de ceux qui répondent à $p' = 0$ et à $p = 0$. On aura donc une limite supérieure de chaque maximum relatif à ce cas, en additionnant ceux que nous venons de trouver; cette limite différera d'ailleurs

peu de la valeur réelle, surtout si les abscisses auxquelles répondent les maxima homologues pour $p' = 0$ et pour $p = 0$ ne sont pas trop éloignées les unes des autres. Voici donc les nombres que nous prendrions pour maxima vers les milieux des cinq travées :

Première travée.......	$135,466p + 210,782p'$;
Deuxième travée......	$35,621p + 214,793p'$;
Troisième travée......	$333,377p + 434,913p'$;
Quatrième travée......	$130,609p + 310,899p'$;
Cinquième travée.....	$184,765p + 289,337p'$.

Le plus fort de ces cinq maxima et des quatre ci-dessus donnés pour les appuis est celui qui a lieu sur l'appui A_3; c'est donc le maximum général, le seul auquel il faudrait avoir égard si la poutre devait être construite avec une section invariable d'une extrémité à l'autre.

En résumé, on voit que la marche suivie dans cet exemple pour arriver à connaître les moments désignés au n° 24 par X, X′, X″, ainsi que la limite supérieure X‴ en valeur absolue, consiste à effectuer les opérations suivantes :

(*a*) Calculer, comme il est dit au n° 9, les séries de nombres u, v, β, γ.

(*b*) En déduire les moments sur tous les points d'appui quand chaque travée successivement est chargée seule.

(*c*) Au moyen de ces moments, calculer, par de simples additions, ceux qui se produisent : 1° sur tous les appuis, quand on surcharge les travées de rang impair, celles de rang pair, toutes les travées; 2° sur un appui A_m et ses deux voisins, quand on admet la surcharge des deux travées adjacentes audit appui A_m, et des autres travées, de deux en deux.

(*d*) Calculer le moment de flexion dû à la charge permanente, ou la fonction $F(x)$ dans toutes les travées.

(*e*) Dans chaque travée de rive, calculer l'expression de la limite positive X′, ou de la fonction f, aux environs de la pile qui forme une des extrémités de cette travée; calculer l'autre limite, ou la fonction ψ_3, pour l'intervalle voisin de la culée; enfin, pour chacun de ces deux intervalles, calculer la fonction

ψ ou f qui reste à connaître, au moyen de la relation $f+\psi=F$.

(f) Dans chaque travée intermédiaire, calculer les trois expressions $f_1(x)$, $\psi_3(x)$, $f_5(x)$ de la fonction f; en déduire, par la même relation, $\psi_1(x)$, $f_3(x)$, $\psi_5(x)$; enfin, écrire $f_2(x)=\psi_5(x)$, $f_4(x)=\psi_1(x)$, $\psi_2(x)=f_5(x)$, $\psi_4(x)=f_1(x)$.

(g) Chercher les valeurs de x qui annulent $F(x)$, pour en conclure les intervalles dans lesquels cette fonction est positive, et ceux dans lesquels elle est négative.

(h) Dans les premiers de ces intervalles, prendre pour X''' la somme $X+X'$; dans les autres, la somme $-X-X''$.

Tout cela constitue sans doute un ensemble assez étendu d'opérations pour arriver au but final, qui est ordinairement la détermination de X'''. Toutefois, si l'on veut faire attention que dans la poutre qu'on vient d'étudier la fonction X''' change vingt-six fois de forme, on reconnaîtra, nous l'espérons, que nous avons obtenu toute la brièveté compatible avec la nature ardue et passablement compliquée de la question.

NOTE SUR LA RECHERCHE DES EFFORTS TRANCHANTS LIMITES.

Avant de passer au chapitre deuxième, nous allons indiquer succinctement un procédé qu'on pourrait employer pour déterminer, dans une section quelconque :

1° L'effort tranchant P dû à la charge permanente seule;

2° La limite positive P' des efforts tranchants dus à toutes les combinaisons possibles de surcharges;

3° La limite négative conjuguée P'';

4° La limite P''' des efforts tranchants produits par l'action simultanée de la charge permanente et de la surcharge, ces efforts étant pris en valeur absolue.

On pourrait prouver d'abord, par la répétition de raisonnements calqués sur ceux du n° 24 :

Que P' et P'' répondent à des surcharges complémentaires;

Qu'on a par conséquent la relation

$$P=\frac{p}{p'}(P'+P'');$$

Enfin, que P''' s'obtient en ajoutant à P celle des deux quantités P' et P'' qui a un signe identique à celui de P, c'est-à-dire qu'on a

$$P''' = P + P' \quad \text{lorsque P est positif,}$$
$$P''' = -(P + P'') \quad \text{lorsque P est négatif.}$$

Tout se réduit donc encore à trouver P' et P''; voici comment on y parvient.

Considérons la *fig.* 6 (*Pl. A, à la fin du volume*), où sont tracées les lignes représentatives des moments de flexion produits par la surcharge isolée de chacune des travées. Les droites portant les numéros

$$m-1,\quad m-3,\quad m-5,\ldots,$$
$$m+2,\quad m+4,\quad m+6,\ldots,$$

ont des inclinaisons négatives sur l'axe des abscisses $A_{m-1}A_m$, dans toute l'étendue de la travée, pendant que le contraire a lieu pour les droites

$$m-2,\quad m-4,\quad m-6,\ldots,$$
$$m+1,\quad m+3,\quad m+5,\ldots.$$

L'inclinaison de la parabole m est négative entre A_{m-1} et le milieu de DF, c'est-à-dire entre $x=0$ et $x=\frac{1}{2}(x'+x^{\text{IV}})$; dans le surplus de la travée, l'inclinaison change de signe et devient positive après avoir passé par zéro. Si l'on se rappelle cette propriété connue, savoir que les diverses inclinaisons dont il s'agit donnent, en valeur absolue, les efforts tranchants produits par les surcharges correspondantes (*), on en conclura sans peine que :

(*) C'est ce que démontre la relation

$$-\frac{dX}{dx} = \Sigma Q$$

trouvée au n° 7 : ΣQ n'est pas autre chose en effet que l'effort tranchant compté positivement de haut en bas, pendant que le premier membre est la dérivée du moment fléchissant prise en signe contraire. Cette nécessité de changer le signe ne subsisterait pas si l'on changeait la convention du sens positif, soit pour les moments, soit pour les efforts tranchants.

Depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}(x'+x^{\text{IV}})$, la limite P' répond à la surcharge des travées $m-1$, $m-3$, $m-5$,...; m; $m+2$, $m+4$, $m+6$,...; ou, en d'autres termes, P' est produit par la combinaison de surcharge qui donne la limite X' des moments fléchissants positifs aux environs de l'appui A_{m-1};

Depuis $x=\frac{1}{2}(x'+x^{\text{IV}})$ jusqu'à $x=a=\overline{A_{m-1}A_m}$, c'est la limite P'' qui est au contraire produite par la combinaison à laquelle serait due la limite X' aux environs de l'appui A_m.

Ainsi donc, la travée étant divisée en deux régions par le point qui a l'abscisse $\frac{1}{2}(x'+x^{\text{IV}})$, on aurait, avec les notations du n° 26 :

$$\text{Pour } x<\frac{1}{2}(x'+x^{\text{IV}})\ldots\ldots \quad P'=-p'\frac{df_1(x)}{dx},$$

$$\text{Pour } x>\frac{1}{2}(x'+x^{\text{IV}})\ldots\ldots \quad P''=-p'\frac{df_5(x)}{dx};$$

et, attendu que P' et P'' répondent, en un même point, à des surcharges complémentaires, on aurait aussi

$$\text{Pour } x<\frac{1}{2}(x'+x^{\text{IV}})\ldots\ldots \quad P''=-p'\frac{d\psi_1(x)}{dx},$$

$$\text{Pour } x>\frac{1}{2}(x'+x^{\text{IV}})\ldots\ldots \quad P'=-p'\frac{d\psi_5(x)}{dx}.$$

Cela fait connaître P' et P'' dans toute la travée, puisque les fonctions f_1, f_5, ψ_1, ψ_5 ont été précédemment déterminées.

S'il s'agissait de la travée de rive A_0A_1, f_1 et ψ_1 seraient remplacées respectivement par ψ_3 et f_3.

Nous allons maintenant cesser de nous occuper des poutres dont les travées présentent des ouvertures quelconques, pour adopter une hypothèse qui renferme à peu près toutes les poutres construites : nous voulons parler du cas où toutes les travées ont des longueurs égales, sauf les deux extrêmes, qui

sont égales entre elles, mais différentes des autres. Dans ce cas particulier, la méthode que nous venons de suivre est susceptible de recevoir avec avantage quelques modifications, principalement pour arriver plus vite aux moments définis à l'alinéa (*c*) du résumé précédent; le problème, avec la restriction dont il s'agit, présente d'ailleurs des circonstances intéressantes et remarquables. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE DEUXIÈME.

DES POUTRES SYMÉTRIQUES, AYANT LEURS TRAVÉES INTERMÉDIAIRES ÉGALES.

§ I. — Préliminaires.

30. *Définition de la poutre.* — Nous allons analyser maintenant en détail le cas particulier d'une poutre ayant pour plan de symétrie le plan vertical mené à égale distance des appuis extrêmes; de plus, nous supposerons une même ouverture c à toutes les travées intermédiaires, laquelle dimension pourra différer de l'ouverture b des travées de rive. La lettre δ désignera constamment le rapport $\frac{c}{b}$ de ces deux longueurs.

Tous les appuis seront, sauf mention contraire, censés donner une fixité parfaite aux points correspondants de la fibre moyenne non déformée, ce qui permettra d'appliquer l'équation (10) du nº 6 à la recherche des moments sur ces appuis, et aussi le théorème sur la composition des effets des forces (nº 5).

Pour l'indication du rang des travées et des appuis, nous continuerons à suivre les conventions du nº 9; ainsi les appuis seront

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \ldots, \quad A_{m-1}, \quad A_m, \ldots, \quad A_n,$$

en nombre $n+1$; il y aura de cette manière n travées, et $A_{m-1}A_m$ sera la $m^{ième}$.

Le nombre n sera, dans les formules générales, supposé plus grand que 2. On exclut ainsi la poutre à deux travées égales, dont la théorie est facile à faire directement (et nous la traiterons du reste dans un article spécial), tandis que la plupart des formules de ce chapitre ne pourraient lui être appliquées. Ce serait une exception à mentionner à chaque instant; on le fait ici une fois pour toutes.

La méthode que nous nous proposons d'appliquer à la recherche des courbes enveloppes des moments sera plus directe et plus rapide que celle dont un exemple a été donné au n° 29 : au lieu de superposer les effets partiels des surcharges sur chaque travée isolée, suivant les principes établis aux n°s 26 et 27, nous rechercherons de prime abord les résultats de cette superposition, ce qui dispensera d'une série de sommations, toujours pénibles quand il y a un nombre notable de travées; nous ne conserverons donc guère du chapitre premier que les résultats et théorèmes généraux, dont la méthode de superposition nous a fourni des démonstrations fort simples, qu'il serait pour le moins inutile de recommencer. En conséquence les séries numériques étudiées au n° 9 seront d'un emploi beaucoup moins fréquent et moins étendu; toutefois elles se représenteront encore et il est bon de voir ce qu'elles deviennent. Cela aura en outre l'avantage de nous amener naturellement à d'autres séries dont l'usage facilitera beaucoup nos recherches.

31. *Des séries u, v, β, γ.* — Il est visible, par raison de symétrie, que les séries ainsi désignées au n° 9 sont deux à deux identiques; les nombres v ne se distinguent pas des nombres u, et la même chose a lieu pour les β et γ.

Les nombres u sont déterminés par un groupe d'équations qui, en ayant égard aux suivantes :

$$a_1 = a_n = b, \quad a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_m = \ldots = a_{n-2} = a_{n-1} = b\delta,$$

prennent la forme ci-après :

$$\begin{aligned} 2u_1(1+\delta) + u_2\delta &= 0, \\ u_1 + 4u_2 + u_3 &= 0, \\ u_2 + 4u_3 + u_4 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ u_m + 4u_{m+1} + u_{m+2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ u_{n-3} + 4u_{n-2} + u_{n-1} &= 0, \\ u_{n-2}\delta + 2u_{n-1}(1+\delta) + u_n &= 0. \end{aligned}$$

Quand on aurait pris $u_1 = 1$, on en conclurait sans peine les

valeurs numériques successives de u_2, u_3, u_4, ..., que l'on pourrait calculer de proche en proche; il n'y a guère, pour parvenir à ce but, de procédé pratique plus simple et plus expéditif; mais le suivant a l'avantage de donner une expression algébrique de l'un quelconque de ces nombres u en fonction de son indice, jusqu'à u_{n-1} inclusivement, ce qui sera utile pour certaines transformations qu'on rencontrera plus loin.

D'après la notation ordinaire usitée dans le calcul des différences finies, posons

$$u_{m+1} = u_m + \Delta u_m,$$
$$u_{m+2} = u_{m+1} + \Delta u_{m+1} = u_m + 2\Delta u_m + \Delta^2 u_m;$$

l'équation générale du groupe ci-dessus (les deux équations extrêmes étant mises à part) devient alors

$$u_m + 4(u_m + \Delta u_m) + u_m + 2\Delta u_m + \Delta^2 u_m = 0,$$

soit, en réduisant,

$$(1) \qquad 6u_m + 6\Delta u_m + \Delta^2 u_m = 0,$$

équation linéaire du second ordre, aux différences finies, où n'entre que l'inconnue u_m. Pour l'intégrer, on cherchera d'abord des solutions particulières telles que

$$u_m = \alpha^m,$$

α désignant une certaine base. En différentiant deux fois cette valeur on a

$$\Delta u_m = \alpha^{m+1} - \alpha^m = \alpha^m(\alpha - 1),$$
$$\Delta^2 u_m = \Delta . \Delta u_m = \alpha^m(\alpha - 1)^2,$$

et ces expressions portées, ainsi que α^m, dans l'équation (1) donneront

$$\alpha^m[6 + 6(\alpha - 1) + (\alpha - 1)^2] = 0,$$

ou bien

$$\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0.$$

On tire de là deux racines distinctes, toutes deux négatives, savoir :

$$\alpha' = -2 - \sqrt{3} = -3,7320508075\ldots,$$
$$\alpha'' = -2 + \sqrt{3} = -0,2679491924\ldots = \frac{1}{\alpha'}.$$

L'équation (1) admet donc comme solutions particulières α'^m et α''^m; d'où il suit que si l'on nomme A et B deux constantes arbitraires, elle aura pour intégrale générale

$$(2) \qquad u_m = A\alpha'^m + B\alpha''^m.$$

Par cela seul qu'on adoptera pour les nombres u des expressions de cette forme, on aura satisfait à toutes les équations du groupe, moins la première et la dernière; et même, comme nous disposons encore des indéterminées A et B, nous pourrons les choisir de manière qu'on ait

$$u_1 = 1, \quad 2u_1(1+\delta) + u_2\delta = 0;$$

il n'y aura plus alors que la dernière équation qui ne sera pas vérifiée, c'est-à-dire que la formule (2) représentera tous les nombres u, à l'exception de u_n.

Les deux conditions précédentes reviennent à

$$A\alpha' + B\alpha'' = 1,$$
$$2(1+\delta)(A\alpha' + B\alpha'') + \delta(A\alpha'^2 + B\alpha''^2) = 0;$$

la seconde peut encore s'écrire

$$A\alpha'(2 + 2\delta + \delta\alpha') + B\alpha''(2 + 2\delta + \delta\alpha'') = 0,$$

ou, en remplaçant α' et α'' par leurs valeurs,

$$A\alpha'(2 - \delta\sqrt{3}) + B\alpha''(2 + \delta\sqrt{3}) = 0.$$

On a donc deux équations du premier degré entre $A\alpha'$ et $B\alpha''$; on en déduit facilement

$$A\alpha' = \frac{1}{2\delta\sqrt{3}}(2 + \delta\sqrt{3}),$$

$$B\alpha'' = -\frac{1}{2\delta\sqrt{3}}(2 - \delta\sqrt{3}),$$

expressions qui, portées dans l'équation (2), donnent enfin

$$(3) \qquad u_m = \frac{1}{2\delta\sqrt{3}}\left[(2 + \delta\sqrt{3})\,\alpha'^{m-1} - (2 - \delta\sqrt{3})\,\alpha''^{m-1}\right].$$

D'après l'analyse même qui conduit à cette formule, on ne

devra l'appliquer que jusqu'à $m = n - 1$; pour avoir u_n on emploiera la relation

$$u_n = -2(1+\delta)u_{n-1} - \delta u_{n-2},$$

d'où résulte

$$-2\delta\sqrt{3}.u_n = 2(1+\delta)\left[(2+\delta\sqrt{3})\alpha'^{n-2} - (2-\delta\sqrt{3})\alpha''^{n-2}\right]$$
$$+\delta\left[(2+\delta\sqrt{3})\alpha'^{n-3} - (2-\delta\sqrt{3})\alpha''^{n-3}\right].$$

Comme $\alpha'\alpha''$ est égal à 1, nous écrirons $\alpha'^{n-2}\alpha''$ et $\alpha''^{n-2}\alpha'$ au lieu de α'^{n-3} et α''^{n-3}; ordonnant alors le second membre par rapport à α'^{n-2} et α''^{n-2}, nous trouverons

$$-2\delta\sqrt{3}.u_n = \alpha'^{n-2}(2+\delta\sqrt{3})(2+2\delta+\delta\alpha'')$$
$$-\alpha''^{n-2}(2-\delta\sqrt{3})(2+2\delta+\delta\alpha')$$
$$= (2+\delta\sqrt{3})^2\alpha'^{n-2} - (2-\delta\sqrt{3})^2\alpha''^{n-2},$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad u_n = -\frac{1}{2\delta\sqrt{3}}\left[(2+\delta\sqrt{3})^2\alpha'^{n-2} - (2-\delta\sqrt{3})^2\alpha''^{n-2}\right].$$

Les formules (3) et (4) représentent toute la série des nombres u [et par conséquent aussi celle des β qui s'en déduit (n° 9)], au moyen des puissances successives des binômes α' et α'' : il est bon, pour cette raison, d'entrer dans quelques détails sur la formation de ces puissances.

32. *Puissances des nombres α', α''; séries* M *et* N. — On a par la formule du binôme, en nommant k un nombre entier positif quelconque,

$$\alpha'^k = (-2-\sqrt{3})^k = (-1)^k(2+\sqrt{3})^k$$
$$= (-1)^k\left[2^k + k.2^{k-1}\sqrt{3} + \frac{k(k-1)}{1.2}2^{k-2}.3\right.$$
$$\left.+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}2^{k-3}.3\sqrt{3} + \ldots\right].$$

On sait que la série entre crochets se termine d'elle-même après $k+1$ termes, et que tous les coefficients tels que

$$\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-i+1)}{1.2.3\ldots i}$$

sont des nombres entiers; si donc on appelle M_k et N_k deux nombres entiers dont l'indice k fixe la valeur, on aura

$$(5)\qquad \alpha'^k = M_k + N_k\sqrt{3}.$$

La valeur de α''^k s'obtiendrait en mettant $-\sqrt{3}$ au lieu de $\sqrt{3}$ dans l'équation fournie par la formule du binôme; donc

$$(6)\qquad \alpha''^k = M_k - N_k\sqrt{3}.$$

Les nombres M_k et N_k, dont la connaissance entraîne immédiatement celle de α'^k et α''^k, pourraient s'exprimer en identifiant $M_k + N_k\sqrt{3}$ avec le développement, ci-dessus indiqué, de α'^k; les parties rationnelles et irrationnelles devant être égales séparément, on aurait

$$M_k = (-1)^k\left[2^k + \frac{3k(k-1)}{1.2}2^{k-2} + \frac{9k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4}2^{k-4} + \ldots\right],$$

$$N_k = (-1)^k\left[k2^{k-1} + \frac{3k(k-1)(k-2)}{1.2.3}2^{k-3} + \frac{9k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{1.2.3.4.5}2^{k-5} + \ldots\right].$$

On tire de là, par la substitution de $k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3, \ldots$:

$$\begin{array}{ll} M_0 = 1, & N_0 = 0, \\ M_1 = -2, & N_1 = -1, \\ M_2 = 7, & N_2 = 4, \\ M_3 = -26, & N_3 = -15, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Mais ces formules deviennent bientôt d'un emploi pénible lorsque k prend une valeur notable : pour prolonger ces deux séries, il sera beaucoup plus simple de remarquer que la combinaison des équations (5) et (6) par addition et soustrac-

tion membre à membre donne

$$(7)\quad \begin{cases} M_k = \frac{1}{2}(\alpha'^k + \alpha''^k), \\ N_k = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha'^k - \alpha''^k); \end{cases}$$

donc M_k et N_k rentrent dans la forme générale (2) des expressions qui vérifient l'équation

$$6u_k + 6\Delta u_k + \Delta^2 u_k = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$u_k + 4u_{k+1} + u_{k+2} = 0;$$

et par suite on aura

$$M_k + 4M_{k+1} + M_{k+2} = 0,$$
$$N_k + 4N_{k+1} + N_{k+2} = 0.$$

Ces deux relations permettent d'avoir très-facilement M_{k+2} au moyen de M_k et M_{k+1}, et d'avoir aussi N_{k+2} quand on a N_k et N_{k+1}; partant des valeurs déjà calculées, nous en déduirons donc les suivantes, et nous formerons le tableau ci-dessous :

$k=0$,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
$M_k=1$,	-2,	7,	-26,	97,	-362,	1351,	-5042,	18817,
$N_k=0$,	-1,	4,	-15,	56,	-209,	780,	-2911,	10864,

$k=$	9,	10,	11,	12,....
$M_k=$	-70226,	262087,	-978122,	3650401,....
$N_k=$	-40545,	151316,	-564719,	2107560,....

La série des N est identique, sauf le signe, à celle des u pour $\delta = 1$. C'est ce qu'on pourrait démontrer *à priori* : la formule (3) donne en effet, pour $\delta = 1$,

$$u_m = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})\alpha'^{m-1} - (2-\sqrt{3})\alpha''^{m-1}\right]$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha'^m - \alpha''^m) = -N_m.$$

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des valeurs entières et positives de l'indice k, mais les seconds membres des égalités (7) ayant une signification précise pour k négatif ou fractionnaire, rien n'empêche d'y substituer des valeurs de cette espèce, et quand on aura calculé les valeurs correspondantes de ces seconds membres, cette opération aura fourni deux nombres M_k, N_k satisfaisant encore aux égalités (5) et (6). Faisons par exemple $k = -m$; il vient

$$M_{-m} = \frac{1}{2}(\alpha'^{-m} + \alpha''^{-m}),$$

$$N_{-m} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha'^{-m} - \alpha''^{-m});$$

ou bien, attendu que $\alpha' = \frac{1}{\alpha''}$,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{-m} &= \frac{1}{2}(\alpha''^{m} + \alpha'^{m}) = M_m, \\ N_{-m} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha''^{m} - \alpha'^{m}) = -N_m, \end{aligned} \right.$$

formules qui permettent d'étendre les séries M et N aux indices négatifs.

Faisons encore $k = m + \frac{1}{2}$, m étant supposé entier : nous aurons

$$M_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\alpha'^{m+\frac{1}{2}} + \alpha''^{m+\frac{1}{2}}\right),$$

$$N_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\alpha'^{m+\frac{1}{2}} - \alpha''^{m+\frac{1}{2}}\right);$$

or on a aussi, comme on le vérifie de suite,

$$\alpha' = -2 - \sqrt{3} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})^2,$$

$$\alpha'' = -2 + \sqrt{3} = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})^2,$$

et partant, si l'on représente par i le radical imaginaire $\sqrt{-\frac{1}{2}}$,

$$\alpha'^{\frac{1}{2}} = i(1+\sqrt{3}), \quad \alpha''^{\frac{1}{2}} = i(1-\sqrt{3}).$$

Donc

$$M_{m+\frac{1}{2}} = \frac{i}{2}\left[\alpha'^m(1+\sqrt{3}) + \alpha''^m(1-\sqrt{3})\right],$$

$$N_{m+\frac{1}{2}} = \frac{i}{2\sqrt{3}}\left[\alpha'^m(1+\sqrt{3}) - \alpha''^m(1-\sqrt{3})\right],$$

ou bien, en ayant égard aux égalités (7),

$$(9) \qquad \begin{cases} M_{m+\frac{1}{2}} = i(M_m + 3N_m), \\ N_{m+\frac{1}{2}} = i(M_m + N_m). \end{cases}$$

Par ces formules, on connaîtra les valeurs de M_k et N_k pour des valeurs de l'indice égales à la moitié d'un nombre entier impair; on aura donc aussi celles de α'^k et α''^k dans la même circonstance.

Les séries M et N jouissent de diverses propriétés assez curieuses, et nous allons en démontrer quelques-unes dont nous aurons besoin plus tard.

On remarquera premièrement que si k et l désignent deux indices positifs tels, que la différence $l-k$ soit positive et tende vers l'infini, les deux nombres M_k, N_k tendent à s'annuler en comparaison de M_l ou N_l. C'est ce que les formules (7) mettent suffisamment en évidence, car le terme α'^l l'emportera infiniment sur α''^l, α'^k, α''^k. Il convient d'ajouter encore que, les valeurs absolues des nombres M et N ne dépendant que des valeurs absolues de l'indice, on peut écarter la restriction relative aux signes de k et l : il suffit pour la vérité du résultat que l dépasse k en grandeur absolue, et que la différence augmente indéfiniment.

Soient maintenant les égalités

$$\alpha'^k = M_k + N_k\sqrt{3},$$
$$\alpha'^l = M_l + N_l\sqrt{3},$$

dans lesquelles k et l représentent deux indices entiers ou

égaux à la moitié d'un nombre impair, positifs ou négatifs. La multiplication membre à membre donne

$$\alpha'^{k+l} = M_k M_l + 3 N_k N_l + \sqrt{3}(M_k N_l + M_l N_k);$$

on a aussi

$$\alpha'^{k+l} = M_{k+l} + N_{k+l}\sqrt{3}:$$

donc il en résulte

$$M_{k+l} + N_{k+l}\sqrt{3} = M_k M_l + 3 N_k N_l + \sqrt{3}(M_k N_l + M_l N_k).$$

Quand les indices k et l sont entiers, il en est de même de tous les nombres M et N qui entrent dans cette égalité; si l'un des deux, k par exemple, égale un nombre entier $+\frac{1}{2}$, la même circonstance existera encore pour M_{k+l}, N_{k+l}, M_k, N_k, en faisant abstraction du facteur i qui entre dans tous les termes de l'égalité; enfin, si k et l sont tous deux des moitiés de nombres impairs, $k+l$ devenant entier, M_{k+l} et N_{k+l} le seront aussi, et les produits deux à deux du second membre seront ceux de deux facteurs entiers multipliés par i^2 ou $-\frac{1}{2}$. Dans tous les cas, on voit que l'égalité précédente devra nécessairement se décomposer en deux, afin d'égaler séparément les parties rationnelles et les irrationnelles : donc

$$(10)\qquad \begin{cases} M_{k+l} = M_k M_l + 3 N_k N_l, \\ N_{k+l} = N_k M_l + M_k N_l. \end{cases}$$

On pourrait remplacer l par $-l$, et, eu égard aux formules (8), on écrirait

$$(11)\qquad \begin{cases} M_{k-l} = M_k M_l - 3 N_k N_l, \\ N_{k-l} = N_k M_l - M_k N_l. \end{cases}$$

L'hypothèse particulière $k = l$ conduit aux relations

$$(12)\qquad \begin{cases} M_{2k} = M_k^2 + 3 N_k^2, \\ N_{2k} = 2 M_k N_k, \\ M_0 = M_k^2 - 3 N_k^2 = 1, \end{cases}$$

La combinaison de la première et de la troisième donnerait

$$(13)\qquad \begin{cases} M_k^2 = \dfrac{1}{2}(M_{2k} + 1), \\[2mm] 3N_k^2 = \dfrac{1}{2}(M_{2k} - 1). \end{cases}$$

Enfin, les formules (10) et (11) fournissent encore les suivantes par des additions ou soustractions deux à deux :

$$(14)\qquad \begin{cases} M_{k+l} + M_{k-l} = 2M_k M_l, \\ M_{k+l} - M_{k-l} = 6N_k N_l, \\ N_{k+l} + N_{k-l} = 2N_k M_l, \\ N_{k+l} - N_{k-l} = 2M_k N_l. \end{cases}$$

Sans nous arrêter davantage à ces transformations, qu'on pourrait multiplier à l'infini, nous terminerons cet article par le tableau de quelques valeurs de M_k et de N_k pour k égal à un entier $+\frac{1}{2}$.

$2k =$	1,	3,	5,	7,	9,	11,
$\frac{1}{i} M_k =$	1,	-5,	19,	-71,	265,	-989,
$\frac{1}{i} N_k =$	1,	-3,	11,	-41,	153,	-571,

$2k =$	13,	15,	17,	19,
$\frac{1}{i} M_k =$	3691,	-13775,	51409,	-191861,
$\frac{1}{i} N_k =$	2131,	-7953,	29681,	-110771,

$2k =$	21,	23,	25, . . . ,
$\frac{1}{i} M_k =$	716035,	-2672279,	9973081, . . . ,
$\frac{1}{i} N_k =$	413403,	-1542841,	5757961, ...

En comparant ce tableau avec celui des nombres N relatifs aux valeurs entières et positives de l'indice, on aperçoit aisé-

ment les relations

$$\frac{1}{i} M_{m+\frac{1}{2}} = N_m - N_{m+1},$$

$$\frac{1}{i} N_{m+\frac{1}{2}} = - N_m - N_{m+1};$$

on les retrouverait par les deux dernières formules (14), en y faisant $k = m + \frac{1}{2}$, $l = \frac{1}{2}$, $M_{\frac{1}{2}} = N_{\frac{1}{2}} = i = \sqrt{-\frac{1}{2}}$.

33. *Autres formes données aux séries u et β; série h.* — Les deux séries M et N étant calculées une fois pour toutes (puisqu'elles ne dépendent en rien de la poutre), on peut s'en servir avantageusement, dans certains cas, pour exprimer les nombres u ou β. Prenons en effet la formule (3); nous l'écrirons ainsi :

$$u_m = \frac{1}{2\delta\sqrt{3}} \left[2(\alpha'^{m-1} - \alpha''^{m-1}) + \delta\sqrt{3}(\alpha'^{m-1} + \alpha''^{m-1})\right],$$

ce qui, d'après les formules (7), revient à

$$(15) \qquad u_m = \frac{1}{\delta}(2N_{m-1} + M_{m-1}\delta).$$

Cette expression est, comme on le voit, entièrement débarrassée d'irrationnelles.

Pareillement, l'expression (4) du nombre u_n s'écrira

$$u_n = - \frac{1}{2\delta\sqrt{3}} \left[(4 + 3\delta^2)(\alpha'^{n-2} - \alpha''^{n-2}) + 4\delta\sqrt{3}(\alpha'^{n-2} + \alpha''^{n-2})\right],$$

ou bien, en vertu des formules (7),

$$(16) \qquad u_n = - \frac{1}{\delta}\left[(4 + 3\delta^2)N_{n-2} + 4\delta M_{n-2}\right].$$

La quantité entre crochets se décompose en deux facteurs rationnels et du premier degré relativement à δ, car l'équation

$$3N_{n-2}\delta^2 + 4M_{n-2}\delta + 4N_{n-2} = 0$$

admet les racines

$$\delta = \frac{-2M_{n-2} \pm \sqrt{4(M_{n-2}^2 - 3N_{n-2}^2)}}{3N_{n-2}},$$

c'est-à-dire, à cause de la troisième formule (12),

$$\delta = \frac{-2(M_{n-2} \mp 1)}{3N_{n-2}};$$

par suite on a

$$(4+3\delta^2)N_{n-2} + 4\delta M_{n-2} = 3N_{n-2}\left[\delta + \frac{2(M_{n-2}+1)}{3N_{n-2}}\right]\left[\delta + \frac{2(M_{n-2}-1)}{3N_{n-2}}\right].$$

Or, si nous posons

$$n - 2 = 2q,$$

nous aurons, par la seconde formule (12) et les deux formules (13),

$$N_{n-2} = 2M_q N_q,$$
$$M_{n-2} + 1 = 2M_q^2,$$
$$M_{n-2} - 1 = 6N_q^2;$$

donc aussi

$$\begin{aligned}(4+3\delta^2)N_{n-2} + 4\delta M_{n-2} &= 6M_q N_q \left(\delta + \frac{4M_q^2}{6M_q N_q}\right)\left(\delta + \frac{12N_q^2}{6M_q N_q}\right)\\ &= 6M_q N_q \left(\delta + \frac{2M_q}{3N_q}\right)\left(\delta + \frac{2N_q}{M_q}\right)\\ &= 2(3N_q\delta + 2M_q)(M_q\delta + 2N_q).\end{aligned}$$

En substituant ces résultats dans u_n, on trouve

$$(17)\quad \begin{cases} u_n = -\dfrac{3N_{n-2}}{\delta}\left[\delta + \dfrac{2(M_{n-2}+1)}{3N_{n-2}}\right]\left[\delta + \dfrac{2(M_{n-2}-1)}{3N_{n-2}}\right],\\ u_n = -\dfrac{2}{\delta}(3N_q\delta + 2M_q)(M_q\delta + 2N_q).\end{cases}$$

On serait parvenu plus simplement encore à la dernière formule, en considérant la quantité entre crochets, dans l'expression (4) de u_n, comme la différence des carrés de $(2+\delta\sqrt{3})\,\alpha'^q$ et de $(2-\delta\sqrt{3})\,\alpha''^q$; on aurait posé, en conséquence,

$$-2\delta u_n\sqrt{3} = \left[(2+\delta\sqrt{3})\,\alpha'^q + (2-\delta\sqrt{3})\,\alpha''^q\right]\left[(2+\delta\sqrt{3})\,\alpha'^q - (2-\delta\sqrt{3})\,\alpha''^q\right],$$

soit, en vertu des relations (5) et (6), ou, si l'on veut, des relations (7),

$$\begin{aligned}u_n &= -\frac{1}{2\delta\sqrt{3}}(4M_q + 6N_q\delta)(4N_q\sqrt{3} + 2M_q\delta\sqrt{3})\\ &= -\frac{2}{\delta}(2M_q + 3N_q\delta)(2N_q + M_q\delta).\end{aligned}$$

La série β se déduit immédiatement de la série u; on sait

(n° 9) qu'il faut toujours prendre $\beta_0 = 0$ et $\beta_m = -\frac{u_m}{u_{m+1}}$. On aura donc

$$(18)\quad \begin{cases} -\beta_m = \dfrac{(2+\delta\sqrt{3})\,\alpha'^{m-1} - (2-\delta\sqrt{3})\,\alpha''^{m-1}}{(2+\delta\sqrt{3})\,\alpha'^{m} - (2-\delta\sqrt{3})\,\alpha''^{m}}, \\ -\beta_m = \dfrac{2N_{m-1} + M_{m-1}\delta}{2N_m + M_m\delta}. \end{cases}$$

Mais ces formules ne doivent s'appliquer ni pour $m = 0$, ni pour $m = n - 1$; il faut, avons-nous déjà dit, prendre $\beta_0 = 0$; quant à β_{n-1}, il faut avoir égard à la forme particulière de u_n et poser l'une des formules ci-dessous :

$$(19)\quad \begin{cases} \beta_{n-1} = \dfrac{(2+\delta\sqrt{3})\,\alpha'^{n-2} - (2-\delta\sqrt{3})\,\alpha''^{n-2}}{(2+\delta\sqrt{3})^2\,\alpha'^{n-2} - (2-\delta\sqrt{3})^2\,\alpha''^{n-2}}, \\ \beta_{n-1} = \dfrac{2N_{n-2} + M_{n-2}\delta}{2(3N_q\delta + 2M_q)(M_q\delta + 2N_q)}, \\ \beta_{n-1} = \dfrac{2N_{n-2} + M_{n-2}\delta}{(4+3\delta^2)N_{n-2} + 4M_{n-2}\delta}. \end{cases}$$

Nous savons déjà d'une manière générale (n° 9) que les nombres β_m varient entre 0 et $\frac{1}{2}$ dans tous les cas, et, s'il y a deux limites l, l' assignées au rapport des longueurs de deux travées adjacentes, les nombres β_m sont alors compris entre $\frac{1}{2(1+l)}$ et $\frac{1}{1+l'+\sqrt{1+l'+l'^2}}$. Dans le cas actuel, on a :

$$\text{pour } \delta < 1 \ldots\ldots \quad l = \frac{1}{\delta}, \quad l' = \delta,$$

$$\text{pour } \delta > 1 \ldots\ldots \quad l = \delta, \quad l' = \frac{1}{\delta};$$

donc, si δ n'atteint pas l'unité, β variera entre $\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}$ et $\frac{1}{1+\delta+\sqrt{1+\delta+\delta^2}}$, et si δ est au contraire supérieur à 1, ces limites deviendront $\frac{1}{2(1+\delta)}$ et $\frac{1}{1+\frac{1}{\delta}+\sqrt{1+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}}}$. En sup-

posant que δ ait pour valeurs extrêmes 0,7 et 1,3, les deux limites inférieures de β sont respectivement 0,2059 et 0,2174; quant aux limites supérieures, elles sont de même 0,3145 et 0,3025.

Au reste, on arrive plus directement peut-être, par l'emploi de la première formule (18), à se faire une idée exacte de la grandeur des rapports β. Cette formule peut en effet s'écrire

$$\beta_m = -\frac{1}{\alpha'} \cdot \frac{1 - \frac{2-\delta\sqrt{3}}{2+\delta\sqrt{3}}\alpha''^{2m-2}}{1 - \frac{2-\delta\sqrt{3}}{2+\delta\sqrt{3}}\alpha''^{2m}},$$

ou, en se rappelant que $-\frac{1}{\alpha'} = -\alpha'' = 0,267949\ldots$, et posant, pour abréger, $z = \frac{2-\delta\sqrt{3}}{2+\delta\sqrt{3}}$,

$$\beta_m = 0,267949\ldots \frac{1 - z\alpha''^{2m-2}}{1 - z\alpha''^{2m}}.$$

Les puissances de α'' décroissent rapidement, car on a, par exemple,

$$\alpha''^2 = 7 - 4\sqrt{3} = 0,07180,$$
$$\alpha''^4 = 97 - 56\sqrt{3} = 0,00515,$$
$$\alpha''^6 = 1351 - 780\sqrt{3} = 0,00037,$$
$$\alpha''^8 = 18817 - 10864\sqrt{3} = 0,00003;$$

comme d'ailleurs z est nécessairement plus petit que 1, on voit que β_m doit peu s'écarter de 0,2679..., pourvu que m soit un nombre notable; pour $m = 2$, la différence relative n'est que de quelques centièmes tout au plus.

On voit encore que la condition

$$\frac{1 - z\alpha''^{2m-2}}{1 - z\alpha''^{2m}} < 1$$

revient à

$$z\alpha''^{2m-2} > z\alpha''^{2m} \quad \text{ou} \quad z\alpha''^{2m-2}(1 - \alpha''^2) > 0,$$

ou bien, attendu que α''^{2m-2} et $1-\alpha''^{2}$ sont positifs,

$$z>0.$$

Ainsi donc, suivant que l'on aura z positif, nul ou négatif, c'est-à-dire δ inférieur, égal ou supérieur au nombre $\frac{2}{\sqrt{3}}=1,1547\ldots$, les valeurs de β seront elles-mêmes toutes inférieures, égales ou supérieures au nombre $0,2679\ldots$, leur limite commune pour $m=\infty$.

Ceci, bien entendu, ne s'applique pas à β_0, nombre toujours nul, ni à β_{n-1}. Pour ce dernier, on a, par la première formule (19),

$$\beta_{n-1}=\frac{1}{2+\delta\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\left(\frac{2-\delta\sqrt{3}}{2+\delta\sqrt{3}}\right)\alpha''^{2n-4}}{1-\left(\frac{2-\delta\sqrt{3}}{2+\delta\sqrt{3}}\right)^{2}\alpha''^{2n-4}}=\frac{1}{2+\delta\sqrt{3}}\cdot\frac{1-z\alpha''^{2n-4}}{1-z^{2}\alpha''^{2n-4}};$$

si le nombre des travées atteint seulement trois ou quatre, β_{n-1} différera à peine de $\frac{1}{2+\delta\sqrt{3}}$, car ce nombre doit se multiplier par le quotient de deux facteurs très-rapprochés de l'unité. De plus, comme z est <1, le facteur $1-z^{2}\alpha''^{2n-4}$ l'emportera sur $1-z\alpha''^{2n-4}$ si z est positif; donc β_{n-1} restera, dans ce cas, inférieur à $\frac{1}{2+\delta\sqrt{3}}$. Il ne lui deviendra rigoureusement égal que pour $z=0$ ou $\delta=\frac{2}{\sqrt{3}}$, et alors on aura $\beta_{n-1}=\frac{1}{4}$, pendant que les autres nombres β seront tous égaux à $0,2679\ldots$. Si z était négatif, β_{n-1} surpasserait un peu $\frac{1}{2+\delta\sqrt{3}}$.

Il nous reste encore à indiquer une dernière expression assez importante de la série u. Appelons, en général, h_m la quantité

$$(20)\qquad h_m=\sqrt{3}\,\frac{1+\alpha''^{m}}{1-\alpha''^{m}}=\sqrt{3}\,\frac{\alpha'^{m}+1}{\alpha'^{m}-1};$$

ces nombres formeront une nouvelle série que nous allons préalablement étudier, dans laquelle chaque terme est défini seu-

lement par son indice, de sorte qu'elle est à calculer une fois pour toutes. Elle se déduit très-simplement des nombres M et N; car on trouve, en multipliant par $\alpha'^{\frac{1}{2}m}$ les deux termes de la fraction $\frac{1+\alpha''^m}{1-\alpha''^m}$,

$$(21) \qquad h_m = \sqrt{3}\,\frac{\alpha'^{\frac{1}{2}m} + \alpha''^{\frac{1}{2}m}}{\alpha'^{\frac{1}{2}m} - \alpha''^{\frac{1}{2}m}},$$



ou, suivant les formules (7),

$$(22) \qquad h_m = \frac{M_{\frac{1}{2}m}}{N_{\frac{1}{2}m}}.$$

Il n'y a donc qu'à consulter les tableaux déjà donnés de M et N, relatifs aux valeurs entières ou fractionnaires de l'indice, pour en extraire le suivant :

$$m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$$
$$h_m = \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56},\ \frac{265}{153},\ \frac{362}{209},$$

$$m = 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ldots,$$
$$h_m = \frac{989}{571},\ \frac{1351}{780},\ \frac{3691}{2131},\ \frac{5042}{2911},\ \frac{13775}{7953},\ \frac{18817}{10864},\ldots.$$

Il est très-remarquable que les fractions h_m soient précisément les réduites de la fraction continue périodique

$$(23) \qquad H = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}},$$

ce dont on peut s'assurer par une vérification directe, pour autant de réduites qu'on le voudra.

Afin de démontrer cette loi, supposons qu'on ait effectué la vérification en bornant la fraction continue à l'une des fractions intégrantes $\frac{1}{2}$, et que,

k désignant un nombre entier, on ait trouvé pour les deux dernières réduites $\frac{M_k}{N_k}$, $\frac{M_{k+\frac{1}{2}}}{N_{k+\frac{1}{2}}}$, ou, ce qui revient au même, d'après les formules (9),

$$\frac{M_k}{N_k}, \quad \frac{M_k + 3N_k}{M_k + N_k}.$$

Supposons en outre qu'on se soit arrêté à une valeur paire de k, afin que les deux nombres M_k et N_k, tous deux positifs, soient bien le numérateur et le dénominateur de l'avant-dernière réduite, sans changement de signe, ce qui est nécessaire pour la formation des réduites suivantes. Comme les fractions intégrantes, après la dernière qu'on a considérée, sont alternativement $\frac{1}{1}$ et $\frac{1}{2}$; l'application de la règle connue donne pour les quatre premières de ces réduites

$$\frac{(M_k + 3N_k).1 + M_k}{(M_k + N_k).1 + N_k} = \frac{2M_k + 3N_k}{M_k + 2N_k},$$
$$\frac{(2M_k + 3N_k).2 + M_k + 3N_k}{(M_k + 2N_k).2 + M_k + N_k} = \frac{5M_k + 9M_k}{3M_k + 5N_k},$$
$$\frac{(5M_k + 9M_k).1 + 2M_k + 3N_k}{(3M_k + 5N_k).1 + M_k + 2N_k} = \frac{7M_k + 12N_k}{4M_k + 7N_k},$$
$$\frac{(7M_k + 12N_k).2 + 5M_k + 9N_k}{(4M_k + 7N_k).2 + 3M_k + 5N_k} = \frac{19M_k + 33N_k}{11M_k + 19N_k}.$$

Or on a, par les formules (10) appliquées en faisant successivement $l = 1$, $l = \frac{3}{2}$, $l = 2$, $l = \frac{5}{2}$,

$$M_{k+1} = -2M_k - 3N_k, \qquad N_{k+1} = -M_k - 2N_k,$$
$$M_{k+\frac{3}{2}} = -i(5M_k + 9N_k), \quad N_{k+\frac{3}{2}} = -i(3M_k + 5N_k),$$
$$M_{k+2} = 7M_k + 12N_k, \qquad N_{k+2} = 4M_k + 7N_k,$$
$$M_{k+\frac{5}{2}} = i(19M_k + 33N_k), \quad N_{k+\frac{5}{2}} = i(11M_k + 19N_k);$$

donc les quatre réduites ci-dessus formées ont pour valeurs respectives

$$\frac{M_{k+1}}{N_{k+1}}, \quad \frac{M_{k+\frac{3}{2}}}{N_{k+\frac{3}{2}}}, \quad \frac{M_{k+2}}{N_{k+2}}, \quad \frac{M_{k+\frac{5}{2}}}{N_{k+\frac{5}{2}}}.$$

Cela montre que si l'identité des réduites avec la série h a été reconnue vraie pour les $2k$ premières réduites, elle doit se trouver également vraie pour les $2(k+2)$ premières; et, comme $k+2$ est pair aussi bien que k, il en résulte qu'elle est vraie aussi jusqu'à l'indice $2(k+4)$, puis jusqu'à l'indice $2(k+6)$, etc., c'est-à-dire qu'elle existe indéfiniment.

La fraction continue H prolongée jusqu'à l'infini, et conséquemment ses réduites h_m, tendent, à mesure que m augmente, vers une limite aisée à trouver, soit par l'équation (21), soit par l'équation (23). La première donne immédiatement, $\alpha''^{\frac{1}{2}m}$ étant nul pour $m = \infty$,

$$\lim. h_m = \sqrt{3};$$

de la seconde on tire

$$H - 1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{H+1}} = \frac{H+1}{H+2},$$

soit, en réduisant,

$$H^2 = 3, \quad H = \sqrt{3}.$$

La fraction continue périodique dont les réduites fournissent les valeurs successives de h_m n'est donc autre chose que le développement de $\sqrt{3}$, radical qui joue un rôle important dans toute cette théorie des poutres symétriques à travées intermédiaires égales.

Cela posé, revenons aux nombres u. Nous tirons des équations (20)

$$\alpha'^m = \frac{h_m + \sqrt{3}}{h_m - \sqrt{3}},$$

soit, en multipliant dans le second membre les deux termes de la fraction par $h_m + \sqrt{3}$,

$$\alpha'^m = \frac{(h_m + \sqrt{3})^2}{h_m^2 - 3};$$

les mêmes équations (20) nous donneront pareillement

$$\alpha''^m = \frac{(h_m - \sqrt{3})^2}{h_m^2 - 3}.$$

Si dans ces valeurs de α'^m et α''^m nous changeons m en $m-1$, et que nous portions α'^{m-1} et α''^{m-1} dans la formule (3), il viendra

$$u_m = \frac{1}{2\delta\sqrt{3}(h_{m-1}^2 - 3)} \times \left[(2+\delta\sqrt{3})(h_{m-1}+\sqrt{3})^2 - (2-\delta\sqrt{3})(h_{m-1}-\sqrt{3})^2\right],$$

ou bien, toute simplification faite,

$$(24)\qquad u_m = \frac{1}{\delta(h_{m-1}^2 - 3)}\left[\delta(h_{m-1}^2 + 3) + 4h_{m-1}\right].$$

Une transformation analogue opérée sur la formule (4) conduit au résultat

$$(25)\qquad u_n = -\frac{2}{\delta(h_{n-2}^2 - 3)}(2h_{n-2} + 3\delta)(2 + \delta h_{n-2}).$$

Nous prions le lecteur de nous pardonner ces longs détails de calcul, assez arides en eux-mêmes, et dont il n'est pas encore en mesure de bien apprécier l'utilité. Cette préparation était cependant indispensable pour arriver à une solution suffisamment simple du problème principal que nous avons en vue; sans cela le chemin que nous devons parcourir aurait été embarrassé d'une foule d'obstacles, et il fallait bien le déblayer un peu avant de nous y engager.

34. *Tableaux numériques relatifs aux séries u et β.*—Nous donnerons plus loin, à la suite du chapitre deuxième, divers tableaux numériques, où l'on trouvera immédiatement et sans calcul les valeurs de certaines quantités dont nous aurons parlé dans ce chapitre. Toutes les fois que le rapport δ devra y figurer comme argument, nous lui attribuerons les huit valeurs :

0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,25, 1,3 (*);

si l'on cherchait un résultat relatif à une valeur intermédiaire, on pourrait l'obtenir approximativement par une interpolation.

Les tableaux I, II, III, IV sont destinés à faire connaître respectivement u_m, u_n, β_m, β_{n-1}, en fonction de l'indice et du rapport δ. Le premier a été calculé par l'emploi de la formule (15), en y donnant à δ les huit valeurs ci-dessus; il n'est

(*) Il est rare dans les applications que les travées intermédiaires aient une ouverture inférieure à celle des travées de rive; les trois premières valeurs de δ seront donc peu utiles aux constructeurs. Toutefois nous n'avons pas cru devoir les exclure, parce que la disposition dont nous parlons, quoique exceptionnelle, pourrait se justifier quelquefois par des sujétions particulières, et aussi parce qu'il est utile d'avoir les éléments nécessaires pour apprécier l'influence de δ sur la résistance de la poutre.

applicable, bien entendu, que pour un indice m inférieur à n, puisqu'on sait que le dernier nombre u, désigné par u_n, est exprimé par une formule spéciale. On peut prendre, par exemple, la relation

$$u_n = -2(1+\delta)u_{n-1} - \delta u_{n-2},$$

qui semble la plus commode pour le calcul numérique de u_n, et à l'aide du tableau I qui fournit u_{n-1} et u_{n-2}, on en tirera facilement le tableau II des valeurs de u_n.

Il y a deux remarques à faire au sujet du tableau II. D'abord, si dans une colonne verticale on ajoute algébriquement ensemble le quadruple d'un nombre avec le nombre précédent et le nombre suivant, la somme obtenue sera nulle; en effet, quand on donne à n trois valeurs consécutives dont la différence est 1, les quantités u_{n-2} et u_{n-1} satisfont à cette condition (n° 31); il en est donc de même de u_n, qui se trouve liée avec elles par la relation linéaire ci-dessus rappelée. Secondement, quand on considère une même colonne horizontale du tableau, n restant le même et δ variant seul, u_n passe par un minimum de valeur absolue, pour une certaine valeur de δ voisine de 1,2. Pour le montrer, on prendra la formule (16) qui donne

$$-u_n = \frac{4+3\delta^2}{\delta} N_{n-2} + 4M_{n-2};$$

le minimum de u_n en valeur absolue répond donc à

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547\ldots,$$

comme on le trouve en égalant à zéro la dérivée de $\frac{4+3\delta^2}{\delta}$, seule quantité variable avec δ dans l'expression précédente.

Les nombres formant la série β_m sont inscrits dans le tableau III, à l'exception toutefois de β_{n-1}, dont la loi de formation n'est pas la même. La valeur de ce dernier nombre est fournie par le tableau IV.

En parcourant ces tableaux, on voit que : 1° à partir de $m=7$, et quel que soit δ entre 0,7 et 1,3, on peut toujours prendre $\beta_m = 0{,}2679492$, à moins d'une demi-unité décimale du septième ordre près, ce qui permet d'étendre le tableau III

à toutes les valeurs de l'indice m au-dessus de $m=8$; 2° à partir de $n=8$, et dans les mêmes limites de δ, les nombres β_{n-1} (bornés aux sept premiers chiffres décimaux) ne varient plus avec n, ce qui permet aussi de prolonger indéfiniment le tableau IV. On a vu plus haut (n° 33) que β_n converge vers la limite $-\alpha''$ ou 0,26794919..., et que β_{n-1} tend vers $\frac{1}{2+\delta\sqrt{3}}$; la rapidité de cette convergence est maintenant rendue sensible.

L'usage des tableaux I, II, III et IV n'offre aucune difficulté. La seule précaution à observer consiste en ceci : quand le nombre n des travées est fixé numériquement, il ne faut prendre dans le tableau I que u_1, u_2, u_3, ..., jusqu'à u_{n-1} inclusivement, et recourir, pour u_n, au tableau II; de même, on ne cherchera dans le tableau III que β_0, β_1, β_2, ..., jusqu'à β_{n-2} inclusivement, le dernier nombre β (c'est-à-dire β_{n-1}) devant être emprunté au tableau IV. *L'oubli de cette règle bien simple exposerait à de graves erreurs.*

Exemple : $n=5$, $\delta=1,25$; on a

$$u_1=1,\quad u_2=-3,6,\quad u_3=13,4,\quad u_4=-50,\quad u_5=208,25;$$

$$\beta_0=0,\quad \beta_1=0,2777778,\quad \beta_2=0,2686567,$$
$$\beta_3=0,2680000,\quad \beta_4=0,2400960.$$

Les deux derniers nombres de chaque série, u_5 et β_4, ont été pris respectivement dans les tableaux II et IV. Les tableaux I et III auraient donné $u_5=186,6$, $\beta_4=0,2679528$; mais ces indications ne seraient bonnes que s'il y avait au moins six travées, et ne conviennent pas au cas actuel.

Ces préliminaires établis, nous allons nous occuper des courbes enveloppes de moments, en commençant par étudier l'effet spécial de la charge permanente.

§ II. — Effet spécial de la charge permanente.

35. *Moments de flexion sur les points d'appui.* — Quand la poutre supporte seulement une charge permanente, uniformément répartie sur sa longueur entière, à raison de p kilo-

grammes par mètre courant, et que de plus les appuis sont disposés de manière à établir la complète fixité des points qui leur correspondent sur la fibre moyenne primitive, les moments de flexion

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3,\ldots,\quad X_{n-2},\quad X_{n-1}$$

sur les $n-1$ points d'appui intermédiaires doivent satisfaire au système d'équations

$$(1)\quad \begin{cases} 2X_1(1+\delta)+X_2\delta=\frac{1}{4}pb^2(1+\delta^3), \\ X_1+4X_2+X_3=\frac{1}{2}pb^2\delta^2, \\ X_2+4X_3+X_4=\frac{1}{2}pb^2\delta^2, \\ X_3+4X_4+X_5=\frac{1}{2}pb^2\delta^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{n-3}+4X_{n-2}+X_{n-1}=\frac{1}{2}pb^2\delta^2, \\ X_{n-2}\delta+2X_{n-1}(1+\delta)=\frac{1}{4}pb^2(1+\delta^3), \end{cases}$$

qu'on obtient en appliquant la formule (10) du n° 6 à tous les groupes de deux travées consécutives, et tenant compte des longueurs de travées indiquées au n° 30. On peut employer pour les résoudre le moyen dont nous avons déjà fait usage (n° 31) à l'occasion des nombres u : nommons en effet m un indice quelconque entre 1 et $n-1$, et posons

$$X_m=\frac{1}{12}pb^2\delta^2+Z_m;$$

alors toutes les équations du groupe (1) ci-dessus, sauf la première et la dernière, prendront la forme

$$Z_m+4Z_{m+1}+Z_{m+2}=0,$$

à laquelle on satisfait par l'expression (2) du n° 31,

$$Z_m=A\alpha'^m+B\alpha''^m.$$

Donc on aura aussi

$$(2)\qquad X_m = \frac{1}{12}pb^2\delta^2 + A\alpha'^m + B\alpha''^m;$$

et sans attribuer à A et B aucune valeur particulière, cette valeur de X_m vérifiera les $n-3$ équations intermédiaires du groupe (1). Maintenant nous pouvons profiter de l'indétermination de A et B pour que cette même formule (2) vérifie les deux équations extrêmes, et de cette manière on voit que, quel que soit n, la question est ramenée à ne comporter que deux inconnues.

D'après ce qu'on vient de dire, on doit tirer A et B des équations

$$\frac{1}{4}pb^2(1+\delta^3) = 2(1+\delta)\left(\frac{1}{12}pb^2\delta^2 + A\alpha' + B\alpha''\right) + \delta\left(\frac{1}{12}pb^2\delta^2 + A\alpha'^2 + B\alpha''^2\right),$$

$$\frac{1}{4}pb^2(1+\delta^3) = \delta\left(\frac{1}{12}pb^2\delta^2 + A\alpha'^{n-2} + B\alpha''^{n-2}\right) + 2(1+\delta)\left(\frac{1}{12}pb^2\delta^2 + A\alpha'^{n-1} + B\alpha''^{n-1}\right),$$

ou, en ordonnant,

$$\frac{1}{12}pb^2(3-2\delta^2) = A\alpha'(2+2\delta+\delta\alpha') + B\alpha''(2+2\delta+\delta\alpha''),$$

$$\frac{1}{12}pb^2(3-2\delta^2) = A\alpha'^{n-1}\left(2+2\delta+\frac{\delta}{\alpha'}\right) + B\alpha''^{n-1}\left(2+2\delta+\frac{\delta}{\alpha''}\right),$$

ou encore, eu égard aux valeurs numériques de α' et α'' (n° 31) et à la relation $\alpha'\alpha'' = 1$,

$$(3)\qquad \frac{1}{12}pb^2(3-2\delta^2) = A\alpha'(2-\delta\sqrt{3}) + B\alpha''(2+\delta\sqrt{3}),$$

$$(4)\qquad \frac{1}{12}pb^2(3-2\delta^2) = A\alpha'^{n-1}(2+\delta\sqrt{3}) + B\alpha''^{n-1}(2-\delta\sqrt{3}).$$

Comme les équations (3) et (4) se représenteront souvent dans la suite, mais avec d'autres quantités dans les premiers membres, nous allons les résoudre d'une manière générale en re-

présentant par S la somme des premiers membres et par T leur différence, calculée en retranchant la première équation de la seconde. On aura donc, si l'on combine les seconds membres successivement par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} S = {} & A\alpha' \left[2(1+\alpha'^{n-2}) + \delta\sqrt{3}(\alpha'^{n-2} - 1)\right] \\ & + B\alpha'' \left[2(1+\alpha''^{n-2}) + \delta\sqrt{3}(1-\alpha''^{n-2})\right], \\ T = {} & A\alpha' \left[2(\alpha'^{n-2} - 1) + \delta\sqrt{3}(\alpha'^{n-2}+1)\right] \\ & - B\alpha'' \left[2(1-\alpha''^{n-2}) + \delta\sqrt{3}(1+\alpha''^{n-2})\right]. \end{aligned}$$

Posons, comme au n° 33,

$$n - 2 = 2q,$$

et multiplions les seconds membres des deux dernières équations par le facteur $\alpha'^q\alpha''^q$, dont la valeur est l'unité : ils pourront alors s'écrire

$$\begin{aligned} S &= \left[2(\alpha'^q + \alpha''^q) + \delta\sqrt{3}(\alpha'^q - \alpha''^q)\right](A\alpha'^{q+1} + B\alpha''^{q+1}), \\ T &= \left[2(\alpha'^q - \alpha''^q) + \delta\sqrt{3}(\alpha'^q + \alpha''^q)\right](A\alpha'^{q+1} - B\alpha''^{q+1}), \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des formules (7) du n° 32,

$$\begin{aligned} A\alpha'^{q+1} + B\alpha''^{q+1} &= \frac{S}{2(2M_q + 3\delta N_q)}, \\ A\alpha'^{q+1} - B\alpha''^{q+1} &= \frac{T}{2\sqrt{3}(2N_q + \delta M_q)}, \end{aligned}$$

ou bien encore, si l'on observe que le rapport $\frac{M_q}{N_q}$ exprime h_{n-2} (n° 33), et que, pour abréger, on écrive simplement h au lieu de h_{n-2} (*),

$$\begin{aligned} A\alpha'^{q+1} + B\alpha''^{q+1} &= \frac{S}{2N_q(3\delta + 2h)}, \\ A\alpha'^{q+1} - B\alpha''^{q+1} &= \frac{T}{2N_q\sqrt{3}(2 + h\delta)}. \end{aligned}$$

(*) Dans la presque totalité des formules et calculs concernant une poutre à n travées, nous n'introduirons que le terme h_{n-2} de la série des nombres h_m, définie au n° 33. Cela justifie pleinement la suppression d'un indice qui se reproduirait toujours le même. Il est donc bien entendu que h mis sans indice dans une formule signifiera la même chose que h_{n-2}.

De là résultent immédiatement les formules

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} A\alpha'^{q+1} &= \frac{1}{4}\left[\frac{S}{2M_q+3\delta N_q}+\frac{T}{\sqrt{3}(2N_q+\delta M_q)}\right] \\ &= \frac{1}{4N_q}\left[\frac{S}{3\delta+2h}+\frac{T}{\sqrt{3}(2+h\delta)}\right], \\ B\alpha''^{q+1} &= \frac{1}{4}\left[\frac{S}{2M_q+3\delta N_q}-\frac{T}{\sqrt{3}(2N_q+\delta M_q)}\right] \\ &= \frac{1}{4N_q}\left[\frac{S}{3\delta+2h}-\frac{T}{\sqrt{3}(2+h\delta)}\right], \end{aligned}\right.$$

qui suffisent pour définir les valeurs de A et de B.

Nous substituerons encore les valeurs (5) dans l'expression $A\alpha'^m + B\alpha''^m$ et nous trouverons

$$\begin{aligned} A\alpha'^m + B\alpha''^m &= \frac{1}{4}\left[\frac{S}{2M_q+3\delta N_q}(\alpha'^{m-q-1}+\alpha''^{m-q-1}) \right.\\ &\qquad \left.+\frac{T}{\sqrt{3}(2N_q+\delta M_q)}(\alpha'^{m-q-1}-\alpha''^{m-q-1})\right] \\ &= \frac{1}{4N_q}\left[\frac{S}{3\delta+2h}(\alpha'^{m-q-1}+\alpha''^{m-q-1}) \right.\\ &\qquad \left.+\frac{T}{\sqrt{3}(2+h\delta)}(\alpha'^{m-q-1}-\alpha''^{m-q-1})\right]. \end{aligned}$$

Or les formules (7) et (8) du n° 32 donnent

$$\alpha'^{m-q-1}+\alpha''^{m-q-1} = 2M_{m-q-1} = 2M_{q+1-m},$$
$$\alpha'^{m-q-1}-\alpha''^{m-q-1} = 2\sqrt{3}\,N_{m-q-1} = -2\sqrt{3}\,N_{q+1-m};$$

donc enfin

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} A\alpha'^m + B\alpha''^m &= \frac{1}{2}\left(\frac{SM_{q+1-m}}{2M_q+3\delta N_q}-\frac{TN_{q+1-m}}{2N_q+\delta M_q}\right) \\ &= \frac{1}{2N_q}\left(\frac{SM_{q+1-m}}{3\delta+2h}-\frac{TN_{q+1-m}}{2+h\delta}\right), \end{aligned}\right.$$

équations dont nous aurons à faire un usage très-étendu.

Dans le problème actuel il faut supposer

$$T=0,\quad S=\frac{1}{6}pb^2(3-2\delta^2);$$

on trouve alors, par la formule (6),

$$A\alpha'^m + B\alpha''^m = \frac{1}{12}pb^2 \frac{M_{q+1-m}}{2M_q + 3\delta N_q}(3 - 2\delta^2)$$
$$= \frac{1}{12}pb^2 \frac{M_{q+1-m}}{N_q} \cdot \frac{3 - 2\delta^2}{3\delta + 2h},$$

et par suite l'expression (2) devient

$$(7) \qquad X_m = \frac{1}{12}pb^2 \left[\delta^2 + \frac{(3 - 2\delta^2)M_{q+1-m}}{2M_q + 3\delta N_q}\right],$$

ou bien encore

$$(8) \qquad X_m = \frac{1}{12}pb^2 \left(\delta^2 + \frac{M_{q+1-m}}{N_q} \cdot \frac{3 - 2\delta^2}{3\delta + 2h}\right).$$

L'indice $q + 1 - m$ pourrait devenir négatif, si m se rapportait à un appui situé dans la seconde moitié de la poutre; mais on sait (n° 32) que les nombres M ne changent pas quand leurs indices changent de signe. D'ailleurs on peut toujours n'attribuer à m que des valeurs au plus égales à $q + 1$ ou $\frac{n}{2}$; en raison de la symétrie, dès qu'on connaît les moments X_m sur une moitié de la poutre, on les connaît aussi sur l'autre. On a en effet

$$X_m = X_{n-m},$$

et cette propriété, évidente *à priori*, se retrouve dans les formules (7) et (8) ci-dessus.

On arrive à un résultat remarquable en faisant $m = 1$. Dans ce cas $\frac{M_{q+1-m}}{N_q}$ devient $\frac{M_q}{N_q}$ ou h; donc

$$X_1 = \frac{1}{12}pb^2 \left(\delta^2 + h\frac{3 - 2\delta^2}{3\delta + 2h}\right),$$

ou, en réduisant,

$$(9) \qquad X_1 = \frac{1}{4}pb^2 \frac{\delta^3 + h}{3\delta + 2h}.$$

Cette formule serait susceptible, à cause de sa grande simplicité, de se fixer dans la mémoire, comme formule usuelle;

si en même temps on retenait les premières valeurs de h, savoir (n° 33) :

$$\text{pour } n = 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ldots,$$
$$h = 1, \quad 2, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{7}{4}, \ldots,$$

on pourrait avoir de suite X_1 dans un grand nombre de cas pratiques. X_1 étant connu, on calculerait les autres moments X_m de proche en proche par les équations (1). Mais ce procédé ne serait bon à employer que si l'on n'avait pas sous les yeux les éléments nécessaires pour appliquer les formules (7) et (8) qui renferment une solution plus complète du problème.

36. *Remarques diverses sur les formules* (7) *et* (8). — Si l'on suppose n infini et m fini (*), le rapport $\frac{M_{q+1-m}}{N_q}$ tend vers une limite aisée à trouver. On a en effet, d'après les formules (7) du n° 32, pour une valeur infinie de k,

$$M_k = \frac{1}{2}\alpha'^k, \quad N_k = \frac{1}{2\sqrt{3}}\alpha'^k,$$

parce que α'' étant plus petit que 1, α''^k tend vers zéro lorsque k grandit au delà de toute limite. Donc, lorsque n et q tendent vers l'infini, on a

$$\lim \frac{M_{q+1-m}}{N_q} = \frac{\sqrt{3}.\alpha'^{q+1-m}}{\alpha'^q} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha'^{m-1}} = \alpha''^{m-1}\sqrt{3};$$

par suite la formule (8) devient, pour cette limite,

$$X_m = \frac{1}{12}pb^2\left[\delta^2 + \frac{(3-2\delta^2)\alpha''^{m-1}\sqrt{3}}{3\delta + 2h}\right],$$

ou encore, en donnant à h sa valeur limite $h = \sqrt{3}$ (n° 33),

$$X_m = \frac{1}{12}pb^2\left[\delta^2 + \frac{(3-2\delta^2)\alpha''^{m-1}}{2+\delta\sqrt{3}}\right].$$

(*) A propos de chaque résultat que nous démontrerons, nous chercherons toujours ce qu'il devient pour $n = \infty$: cela indiquera la limite vers laquelle il tend (d'une manière ordinairement assez rapide), quand le nombre des travées augmente.

Lorsqu'on admet la valeur particulière

$$\delta = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,22474\ldots,$$

le binôme $3 - 2\delta^2$ s'annule, et les formules (7) ou (8) montrent que X_m devient constant quel que soit m. Le moment de flexion sur un point d'appui quelconque prend la valeur $\frac{1}{12}pb^2\delta^2$, égale à celle qui se produirait sous la même charge si tous les appuis devenaient des encastrements. Ainsi donc, *dans une poutre où les travées intermédiaires ont une longueur égale à celle des travées de rive, multipliée par 1,22474..., tous les appuis intermédiaires se comportent absolument comme des encastrements, sous l'action de la charge permanente.*

On arrive à une conséquence analogue dans le cas où q et m deviennent tous deux infinis : en effet, N_q est alors infini relativement à M_{q+1-m} (n° 32), de sorte que X_m se réduit encore à $\frac{1}{12}pb^2\delta^2$: c'est ce que montre aussi la dernière formule donnée pour exprimer X_m dans l'hypothèse de n infini, car en faisant grandir m, α''^{m-1} converge vers zéro. Donc, *dans une poutre d'un nombre infini de travées, les appuis qui sont infiniment éloignés d'une extrémité fonctionnent comme des encastrements sous l'action de la charge permanente.* On peut même dire que *dans une poutre ayant un nombre quelconque de travées, les appuis se rapprochent de plus en plus de fonctionner comme des encastrements, sous la charge permanente, à mesure qu'ils sont plus rapprochés du centre, et que le nombre des travées est plus grand :* car le rapport $\frac{M_{q+1-m}}{N_q}$ diminue lorsque $q+1-m$ diminue et lorsque q augmente.

Chaque fois que m varie d'une unité, M_{q+1-m} change de signe, puisque les nombres M sont alternativement positifs et négatifs (n° 32) : par conséquent, quand on fait tendre m vers $q+1$ ou $q+\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire vers la valeur qui convient à l'appui central si n est pair, ou à l'appui précédant la travée cen-

trale si n est impair), X_m se rapproche de sa limite $\frac{1}{12}pb^2\delta^2$ à la manière des réduites successives d'une fraction continue, en passant alternativement au-dessus et au-dessous.

Les moments X_m sont généralement positifs : toutefois cette règle comporte quelques exceptions.

Pour les découvrir, faisons d'abord successivement $m=1$ et $m=2$.

Si m est égal à 1, la formule (9) montre immédiatement que X_1 a toujours le signe $+$, car p, δ et h désignent des quantités essentiellement positives. Pour $m=2$ on a, par la formule (8),

$$X_2 = \frac{1}{12}pb^2\left(\delta^2 + \frac{M_{q-1}}{N_q}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}\right).$$

Or la première formule (11) du n° 32 donne

$$M_{q-1} = M_q M_1 - 3N_q N_1 = -2M_q + 3N_q;$$

donc

$$\frac{12X_2}{pb^2} = \delta^2 + \frac{3N_q - 2M_q}{N_q}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h} = \delta^2 + (3-2h)\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}.$$

Le signe de X_2 sera donc celui de

$$\delta^2 + (3-2h)\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h},$$

ou bien, attendu que $3\delta+2h$ est positif, celui de

$$\delta^2(3\delta+2h) + (3-2h)(3-2\delta^2).$$

Cette dernière expression, toute réduction faite, devient

$$3[\delta^3 + 2(h-1)\delta^2 + 3 - 2h],$$

ce qui peut encore s'écrire

$$3(\delta+1)[\delta^2 - (3-2h)\delta + 3 - 2h];$$

le signe de X_2 est donc enfin celui du trinôme, du second degré en δ,

$$\delta^2 - (3-2h)\delta + 3 - 2h.$$

Ce trinôme, nécessairement positif pour $\delta = \pm\infty$, ne change de signe que dans l'intervalle des racines qui le rendent nul, lesquelles racines ont

pour expression

$$(10) \qquad \delta = \frac{1}{2}\left[3 - 2h \pm \sqrt{(2h-3)(2h+1)}\right].$$

Pour $n = 3$, h est égal à 1 (n° 33), et ces racines deviennent imaginaires; X_2 est donc toujours positif dans une poutre à trois travées, ce qui était évident *à priori*, car, en vertu de la symétrie, X_2 ne diffère pas de X_1, et l'on a déjà reconnu que ce dernier moment reste toujours positif. Pour n supérieur à 3, on trouve une racine réelle et positive δ', et une autre négative; X_2 sera donc négatif pour les valeurs de δ inférieures à la première racine. En voici le tableau calculé à l'aide de la formule (10) où l'on a mis pour h les nombres indiqués plus haut (n° 33) :

$n = 4$,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
$\delta' = 0,6180$,	0,4343,	0,5000,	0,4824,	0,4885,	0,4874,	0,4877,

$n = 11$,	12, ...,	∞,
$\delta' = 0,4876$,	0,4876, ...,	0,4876.

La valeur limite de δ' pour $n = \infty$ se trouve en faisant $h = \sqrt{3}$.

Nous allons maintenant attribuer à m une valeur quelconque, en la choisissant seulement plus petite que $\frac{n}{2}$, ou au plus égale à cette limite. Cette restriction ne nuit évidemment en rien à la généralité des résultats, puisque les deux moitiés de la poutre se trouvent dans des conditions identiques, et qu'il suffit d'étudier ce qui se passe dans l'une d'elles; mais en outre elle est ici nécessaire, pour ne pas tomber dans la confusion, parce que nous allons avoir à distinguer les cas de m pair et de m impair, et que, dans les poutres ayant un nombre impair de travées, on changerait la parité de m suivant que l'on compterait les rangs à partir de l'une ou de l'autre extrémité. Avec la convention $m \leqq \frac{n}{2}$, il est bien entendu que l'on compte à partir de l'extrémité la plus voisine, ce qui supprime la possibilité de toute équivoque.

Cela posé, la condition $X_m < 0$ équivaut, d'après la formule (8), à

$$\delta^2 + \frac{M_{q+1-m}}{N_q} \cdot \frac{3 - 2\delta^2}{3\delta + 2h} < 0,$$

soit, en multipliant par le facteur positif $\frac{1}{3}(3\delta + 2h) = \delta + \frac{2M_q}{3N_q}$, à

$$\delta^3 + \frac{2\delta^2}{3N_q}(M_q - M_{q+1-m}) + \frac{M_{q+1-m}}{N_q} < 0.$$

L'indice m pouvant varier de 1 à $\frac{n}{2}$ ou $q+1$, on voit d'abord que, dans la différence $M_q - M_{q+1-m}$, le premier terme a un indice au moins égal à celui du second; donc il ne peut pas être inférieur en valeur absolue, et donne son signe à la différence. Donc le coefficient de δ^2 a le signe de $\frac{M_q}{N_q}$, c'est-à-dire le signe +. Ainsi les deux premiers termes, en δ^4 et δ^2, de l'inégalité précédente sont toujours positifs. Quant au troisième, il le sera également pour m impair, car les nombres q et $q+1-m$, tous deux positifs, étant en outre simultanément pairs ou impairs, M_{q+1-m} et N_q auront nécessairement même signe. Donc l'imparité de m exclut la possibilité de rendre X_m négatif.

Si au contraire m est pair, le dernier terme de l'inégalité de condition change de signe, et dès lors il devient possible d'y satisfaire en prenant δ suffisamment petit. C'est ce qu'on vient de voir plus haut pour le cas de $m = 2$. En faisant dans l'inégalité successivement $m = 4, 6, 8, \ldots$, et attribuant au nombre n des travées une série de valeurs à partir de $n = 2m$ jusqu'à l'infini, on pourrait de même former le tableau des limites δ' dans ces divers cas. On aurait à résoudre, par tâtonnement, une suite d'équations du 3e degré. Mais le calcul suivant, sans donner exactement ces limites, suffit pour montrer leur décroissance rapide à mesure que m augmente.

Remarquons en effet que δ' sera nécessairement au-dessous de la valeur δ'' capable d'annuler l'ensemble du second et du troisième terme de l'inégalité, laquelle valeur satisfait à la condition

$$\frac{2}{3}\delta''^2(M_q - M_{q+1-m}) + M_{q+1-m} = 0,$$

d'où résulte

$$\delta'' = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{M_q}{M_{q+1-m}}}}.$$

Par la première formule (10) du n° 32, on a d'ailleurs

$$M_q = M_{(q+1-m)+(m-1)} = M_{q+1-m}M_{m-1} + 3N_{q+1-m}N_{m-1},$$

et par suite

$$\frac{M_q}{M_{q+1-m}} = M_{m-1} + \frac{3}{h_{n-2m}}N_{m-1}.$$

Donc le rapport $\frac{M_q}{M_{q+1-m}}$ dépasse en valeur absolue M_{m-1}, car N_{m-1} a même signe que M_{m-1}, et h_{n-2m} est toujours positif. Comme, en outre, M_{m-1} et

$\frac{M_q}{M_{q+1-m}}$ sont négatifs pour m pair, on en conclut facilement

$$\delta' < \delta'' < \sqrt{\frac{3}{2(1-M_{m-1})}}.$$

Pour $m = 4, 6, 8, 10, \ldots$, la limite supérieure ainsi trouvée devient respectivement 0,2357, 0,0643, 0,0172, 0,0046,.... Cela veut dire que X_4, par exemple, ne saurait devenir négatif tant que δ ne sera pas inférieur à 0,2357, du moins quand il s'agit d'une poutre à huit travées ou plus, ce qui est nécessaire pour que X_4 ne se confonde pas avec un X_m à indice moindre.

Ajoutons enfin que les limites δ' au-dessous desquelles il faut prendre δ, pour réaliser le fait d'un moment X_m négatif, ne se rencontrent guère dans la pratique. Nous ne connaissons aucun pont, parmi tous ceux qu'on a construits, dans lequel les travées de rive aient une ouverture supérieure à celles des autres travées : on a donc presque toujours $\delta \overline{>} 1$, et par conséquent le fait en question sera pratiquement très-rare ; il n'arrivera jamais, notamment, pour les valeurs de δ comprises entre 0,7 et 1,3, les seules que nous ayons considérées dans nos applications numériques.

37. *Moment de flexion produit par la charge permanente, en un point quelconque d'une travée.* — Lorsqu'on aura préalablement calculé les moments de flexion sur les points d'appui, en employant les formules du n° 35, il sera facile d'en déduire le moment de flexion X en un point quelconque d'une travée arbitrairement choisie $A_{m-1}A_m$.

Si, par exemple, il s'agit d'une travée intermédiaire, dont la longueur est $c = b\delta$ (n° 30), nous aurons à la distance x de l'appui A_{m-1}, suivant une formule du n° 1, déjà fréquemment employée dans le chapitre premier,

$$(11) \qquad X = X_{m-1} + (X_m - X_{m-1})\frac{x}{c} - \frac{1}{2}px(c-x),$$

expression où tout est connu, et qui permet de calculer numériquement le moment X, ainsi que de discuter les états de grandeur par lesquels il passe.

Ces grandeurs successives étant représentées par les ordonnées d'une parabole du second degré, dont les abscisses seraient les valeurs de x, il est utile de se demander : 1° les valeurs particulières x_1, x_2 de l'abscisse qui annulent X, c'est-à-dire la position qu'occupent les intersections de la parabole avec l'axe des x ; 2° l'abscisse et l'ordonnée du sommet. La première question a même une importance assez grande quand on veut déterminer, pour chaque section, le plus grand moment absolu sous l'action simultanée de la charge permanente et de la surcharge, car il faut alors savoir quel est le signe de X, et les changements de signe de ce moment répondent précisément à $x = x_1$, $x = x_2$.

Pour avoir x_1 et x_2, il faut prendre les racines de l'équation $X = 0$, savoir :

$$\frac{x^2}{c^2} - \left[1 - \frac{2(X_m - X_{m-1})}{pc^2}\right]\frac{x}{c} + \frac{2X_{m-1}}{pc^2} = 0,$$

d'où les racines

$$(12)\quad \frac{x}{c} = \frac{1}{2} - \frac{X_m - X_{m-1}}{pc^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{X_m + X_{m-1}}{pc^2} + \left(\frac{X_m - X_{m-1}}{pc^2}\right)^2};$$

en dédoublant le signe du radical on obtiendrait x_1 et x_2. Nous en aurons une autre expression en remplaçant X_m et X_{m-1} par leurs valeurs déduites de la formule (8) : cette formule donne, eu égard à la relation $b\delta = c$,

$$\frac{X_m - X_{m-1}}{pc^2} = \frac{3 - 2\delta^2}{12\delta^2 N_q(3\delta + 2h)}(M_{q+1-m} - M_{q+2-m}),$$

$$\frac{X_m + X_{m-1}}{pc^2} = \frac{1}{6} + \frac{3 - 2\delta^2}{12\delta^2 N_q(3\delta + 2h)}(M_{q+1-m} + M_{q+2-m});$$

or les deux premières relations (14) du n° 32, en y faisant $l = \frac{1}{2}$, $k = q - m + \frac{3}{2}$, $M_{\frac{1}{2}} = N_{\frac{1}{2}} = \sqrt{-\frac{1}{2}} = i$, donnent aussi

$$M_{q-m+1} - M_{q-m+2} = -6iN_{q-m+\frac{3}{2}},$$

$$M_{q-m+1} + M_{q-m+2} = 2iM_{q-m+\frac{3}{2}},$$

d'où résulte

$$\frac{X_m - X_{m-1}}{pc^2} = -\frac{(3-2\delta^2)\,i\,N_{q-m+\frac{3}{2}}}{2\delta^2 N_q(3\delta+2h)},$$

$$\frac{X_m + X_{m-1}}{pc^2} = \frac{1}{6} + \frac{(3-2\delta^2)\,i\,M_{q-m+\frac{3}{2}}}{6\delta^2 N_q(3\delta+2h)}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (12) et posant, pour abréger l'écriture,

$$N_q = N, \quad M_{q-m+\frac{3}{2}} = M', \quad N_{q-m+\frac{3}{2}} = N',$$

il viendra

$$(13)\left\{\begin{aligned} \frac{2x}{c} &= 1 + \frac{iN'(3-2\delta^2)}{N\delta^2(3\delta+2h)} \\ &\pm\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2iM'(3-2\delta^2)}{3N\delta^2(3\delta+2h)} + \left[\frac{iN'(3-2\delta^2)}{N\delta^2(3\delta+2h)}\right]^2}. \end{aligned}\right.$$

La présence du symbole imaginaire i n'empêche pas la formule (13) de ne contenir, soit sous le radical, soit en dehors, que des quantités réelles : en effet, sur les deux indices q et $q - m + \frac{3}{2}$, il y en a nécessairement un entier et l'autre égal à un entier augmenté de $\frac{1}{2}$, d'où il résulte que si N ne contient pas le facteur i, ce facteur entrera dans M' et N', et inversement; donc les rapports $\frac{iM'}{N}$, $\frac{iN'}{N}$ sont toujours réels, ce qui justifie notre assertion. Toutefois il peut arriver que le radical recouvre une quantité négative, et partant que x_1 et x_2 soient imaginaires.

Cherchons les conditions pour qu'il en soit ainsi. Si nous posons

$$z = \frac{iN'(3-2\delta^2)}{N\delta^2(3\delta+2h)} \ (*),$$

(*) Nous excluons ici, pour y revenir plus loin, le cas particulier où $q+\frac{3}{2}$ serait égal à m, ce qui rendrait z nul ainsi que N'. Cela se réalise pour la travée centrale d'une poutre ayant un nombre impair de travées.

l'expression sous le radical pourra s'écrire

$$(14)\qquad z^2 - \frac{2M'}{3N'} z + \frac{1}{3};$$

on voit qu'elle s'annule quand on fait

$$z = \frac{1}{3N'}\left(M' \pm \sqrt{M'^2 - 3N'^2}\right),$$

ou bien, en multipliant et divisant ces valeurs par $M' \mp \sqrt{M'^2 - 3N'^2}$,

$$z = \frac{N'}{M' \mp \sqrt{M'^2 - 3N'^2}},$$

ou encore, en vertu de la troisième relation (12) du n° 32,

$$(15)\qquad z = \frac{N'}{M' \mp 1}:$$

donc l'expression (14) représente le produit

$$\left(z - \frac{N'}{M' - 1}\right)\left(z - \frac{N'}{M' + 1}\right),$$

et il s'agit de reconnaître si elle peut avoir le signe —. Comme elle est positive pour $z = \pm \infty$, elle ne changera de signe, pour devenir négative, que si z passe entre les deux valeurs (15); comme, de plus, z désigne une quantité nécessairement réelle, la première condition cherchée consistera en ce que les valeurs (15) soient elles-mêmes réelles; ce qui exige que M' et N' le soient aussi, c'est-à-dire que l'indice $q - m + \frac{3}{2}$ soit un nombre entier. Pour cela il faut que le nombre des travées soit impair, puisque m est un nombre entier et que q représente $\frac{n}{2} - 1$. Ainsi donc x_1 et x_2 ne seront susceptibles de devenir imaginaires que dans les poutres d'un nombre impair de travées.

Si cette condition est remplie, les valeurs (15) reçoivent encore utilement une nouvelle forme. Nommant k la moitié de l'indice $q - m + \frac{3}{2}$ de M' et N', nous aurons par la seconde formule (12) et les formules (13) du n° 32

$$N' = 2M_k N_k,\quad M' - 1 = 6N_k^2,\quad M' + 1 = 2M_k^2,$$

et par suite

$$\frac{N'}{M'-1}=\frac{M_k}{3N_k}=\frac{1}{3}h_{q-m+\frac{3}{2}},$$

$$\frac{N'}{M'+1}=\frac{N_k}{M_k}=\frac{1}{h_{q-m+\frac{3}{2}}}.$$

Or les nombres h se trouvent tous compris (n° 33) entre 1 et 2 : on voit donc par là que les valeurs (15) sont toutes deux positives et comprises dans l'intervalle de $\frac{1}{3}$ à 1.

Maintenant est-il possible, en choisissant convenablement δ, de faire en sorte que z tombe entre ces deux valeurs? Je dis d'abord que la réponse est affirmative lorsque le rang m de la travée dont nous nous occupons est un nombre pair. Il arrive alors en effet que $q-m+\frac{3}{2}$ et $q-\frac{1}{2}$, ayant pour différence $m-2$, sont des nombres entiers *de même parité* (tous deux pairs ou tous deux impairs); on en conclut sans peine que $\frac{N}{i}$ et N' ont simultanément le signe $+$ ou le signe $-$, de sorte que le rapport $\frac{iN'}{N}$ est positif. Donc z sera aussi positif pour δ compris entre 0 et $\sqrt{\frac{3}{2}}$; et attendu qu'entre ces deux limites z varie d'une manière continue, de ∞ à 0, il y aura deux valeurs de δ qui le rendront égal à $\frac{N'}{M'\pm 1}$, et dans l'intervalle desquelles x_1 et x_2 deviendront imaginaires.

Le cas de m impair exige un peu plus de détails. Il faut d'abord se rendre compte des grandeurs successives par lesquelles passe la fonction de δ

$$y=\frac{2\delta^2-3}{\delta^2(3\delta+2h)},$$

quand δ varie de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ à ∞ : à cet effet on prend la dérivée, qui est

$$\frac{dy}{d\delta}=\frac{3(-2\delta^3+9\delta+4h)}{\delta^3(3\delta+2h)^2};$$

on voit que cette dérivée commence par être positive à partir de $\delta=\sqrt{\frac{3}{2}}$ jusqu'à la valeur donnée par l'équation

$$2\delta^3-9\delta-4h=0,$$

dont la racine positive unique varie à la rigueur un peu avec h. Quand

on fait h égal successivement à

$$1,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{19}{11},\ \frac{26}{15},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56},\ldots,\ \sqrt{3},$$

on trouve pour cette racine les nombres

2,3159, 2,4733, 2,4256, 2,4365, 2,4331, 2,4340,
2,4337, 2,4338,..., 2,4338,

et pour les valeurs correspondantes de la fonction y

0,1610, 0,1322, 0,1404, 0,1383, 0,1388,..., 0,1388.

Au delà des valeurs précédentes de δ la dérivée $\frac{dy}{d\delta}$ deviendrait négative et y diminuerait : c'est donc le maximum de cette fonction que nous venons de donner, et on voit que dans aucun cas il ne dépasse une limite égale à 0,161.

Secondement nous chercherons une limite supérieure du facteur $\frac{iN'}{N}$ ou $\frac{iN_{q-m+\frac{3}{2}}}{N_q}$. On a par la seconde formule (11) du n° 32

$$N_{q-m+\frac{3}{2}} = N_q M_{m-\frac{3}{2}} - M_q N_{m-\frac{3}{2}},$$

d'où il résulte, dans l'hypothèse particulière $m = 2$,

$$\frac{iN'}{N} = i\left(M_{\frac{1}{2}} - hN_{\frac{1}{2}}\right) = i^2(1-h) = \frac{1}{2}(h-1);$$

h étant toujours au-dessous de 2, $\frac{iN'}{N}$ est donc, dans l'hypothèse en question, tout au plus égal à $\frac{1}{2}$. Or, comme la première travée est exclue de la discussion actuelle, m ne descendra pas au-dessous de 2, et quand on lui donnera une valeur plus forte, on diminuera par cela même l'indice $q - m + \frac{3}{2}$ ainsi que la valeur absolue du nombre N' correspondant : donc enfin $\frac{iN'}{N}$ ne saurait dépasser la limite $\frac{1}{2}$, en valeur absolue.

Ces préliminaires posés, la conclusion devient facile. Rappelons-nous que pour rendre imaginaires les intersections de la parabole représentative avec l'axe des x, il faut placer z entre $\frac{N'}{M'-1}$ et $\frac{N'}{M'+1}$, ce qui exige que δ soit pris de manière à rendre z positif et supérieur à $\frac{1}{3}$. Or,

c'est à quoi l'on ne pourra réussir quand m sera impair. En effet, $q - m + \frac{3}{2}$ et $q - \frac{1}{2}$ étant de parité différente, le rapport $\frac{iN'}{N}$ devient négatif; pour faire z positif il faut alors prendre $\delta > \sqrt{\frac{3}{2}}$; mais alors z se trouve être le produit de deux facteurs dont les valeurs absolues ont pour limites 0,161 et $\frac{1}{2}$, et par suite il ne peut atteindre $\frac{1}{3}$. La condition nécessaire ne saurait donc être remplie.

En résumé, sauf les cas particuliers provisoirement laissés de côté, nous pouvons énoncer cette proposition :

Pour qu'il existe des valeurs de δ susceptibles de rendre imaginaires les intersections avec l'axe des x, de la parabole représentant, dans une travée quelconque, les moments de flexion produits par la charge permanente, il faut et il suffit que le rang de la travée soit pair et le nombre total des travées impair.

Mais ce n'est pas assez d'avoir décidé si les racines x_1 et x_2 sont réelles ou imaginaires : la fonction X que nous venons d'étudier n'étant applicable que dans l'étendue de la travée $A_{m-1}A_m$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = c$, il y a lieu de rechercher la condition pour que les valeurs x_1, x_2 se trouvent dans le même intervalle.

Ces valeurs sont données par l'équation (13), qu'on peut écrire

$$\frac{2x}{c} = 1 + z \pm \sqrt{z^2 - \frac{2M'}{3N'}z + \frac{1}{3}};$$

si elles sont toutes deux comprises entre 0 et c, il en sera de même de leur demi-somme $\frac{1}{2}c(1+z)$, et par suite z devra tomber entre les limites -1 et $+1$. Cette condition étant remplie, le sommet de la parabole qui représente X sera dans l'intervalle des appuis A_{m-1}, A_m; et attendu que cette parabole, d'après son équation, tourne sa concavité vers les ordonnées positives, on voit que ses intersections, supposées réelles, avec l'axe des x se feront dans la travée même ou en dehors, suivant que X_{m-1} et X_m seront positifs ou négatifs.

On a vu plus haut (n° 36) que le premier cas est de beaucoup le plus ordinaire, pour ne pas dire le seul cas pratique : à cette occasion, nous avons précisé les conditions nécessaires pour le réaliser effectivement. Il

suffit ici d'y joindre les deux inégalités

$$z > -1, \quad z < 1,$$

pour être en droit d'affirmer que les racines x_1 et x_2 seront positives et plus petites que c, toutes les fois qu'elles ne deviendront pas imaginaires. En examinant les choses de plus près, on peut reconnaître que sur les deux inégalités ci-dessus il y en a toujours une satisfaite d'elle-même, en raison de ce fait que δ, par sa nature propre, reste essentiellement positif. En effet, si m est pair, $\frac{iN'}{N}$ est positif et z ne peut devenir négatif qu'en prenant $\delta > \sqrt{\frac{3}{2}}$; mais alors on sait que la valeur absolue de z a pour limite supérieure $\frac{1}{2} \cdot 0{,}161$: donc on est certain d'avance de trouver $z > -1$, quel que soit δ. Si au contraire m est impair, $\frac{iN'}{N}$ change de signe, et le même raisonnement prouve qu'on a nécessairement $z < 1$.

Ainsi donc, en résumé, les moments sur les points d'appui étant supposés positifs et les abscisses x_1, x_2 réelles, les points que celles-ci représentent seront dans la travée ou en dehors, suivant que δ vérifiera ou ne vérifiera pas les inégalités

$z < 1$, si la travée est de rang pair (en comptant depuis l'extrémité la plus voisine),
$z > -1$, dans le cas contraire.

La parabole représentative de X a pour équation l'équation (11) ci-dessus, qui peut se mettre sous la forme

$$X = p\left(D - D'x + \frac{1}{2}x^2\right),$$

D et D′ désignant deux constantes. Son sommet s'obtiendrait en posant $\frac{dX}{dx} = 0$, ce qui donne $x = D'$; l'ordonnée correspondante serait $p\left(D - \frac{1}{2}D'^2\right)$, soit Cpb^2, si l'on nomme C un coefficient déterminé par la relation

$$C = \frac{1}{b^2}\left(D - \frac{1}{2}D'^2\right).$$

Or x_1 et x_2 étant les deux racines de l'équation $X = o$, on a

$$x_1 + x_2 = 2D',$$
$$x_1 x_2 = 2D;$$

de là il résulte : premièrement, que le sommet répond à l'abscisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, ce qui est rendu évident d'ailleurs par la situation de la parabole; secondement, que le coefficient C peut s'exprimer par la formule

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} C &= \frac{1}{b^2}\left[\frac{1}{2}x_1 x_2 - \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^2\right] = -\frac{1}{2b^2}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{x_2 - x_1}{2c}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

L'ordonnée Cpb^2 est donc toujours négative quand x_2 et x_1 sont réelles. On remarque aussi que la différence $\frac{x_2 - x_1}{2c}$ n'est autre chose que le radical de la formule (12), ou celui de la formule (13) divisé par 2.

38. *Cas particuliers d'une travée extrême et d'une travée centrale.* — Le cas particulier d'une travée extrême rentre dans les formules (11) et (12) en y remplaçant c par b et supposant nul un des moments X_m, X_{m-1}, ce dernier par exemple, si c'est la première travée qu'on étudie. Mais on ne doit pas appliquer la formule (13) et ses conséquences, parce que la formule (8) employée pour exprimer les moments X_m ne comporte pas les hypothèses $m = o$, $m = n$.

Supposons donc, pour fixer les idées, que nous considérions la première travée, ce qui suffit, en raison de la symétrie : nous aurons, X_0 étant nul,

$$(17)\qquad X = X_1 \frac{x}{b} - \frac{1}{2}px(b - x),$$

expression dans laquelle x représente la distance d'une section quelconque à l'origine ou culée A_0. On voit que X s'annule pour deux valeurs de x toujours réelles, savoir $x_1 = o$, ce

qui était connu d'avance, et

$$(18) \qquad x_2 = b\left(1 - \frac{2X_1}{pb^2}\right).$$

Cette équation peut, en vertu de la formule (7), s'écrire ainsi :

$$\frac{x_2}{b} = 1 - \frac{\delta^3 + h}{2(3\delta + 2h)} = \frac{3h + 6\delta - \delta^3}{2(3\delta + 2h)};$$

on voit alors que x_2 devient négatif en prenant δ suffisamment grand. La limite inférieure de δ, au delà de laquelle il en sera ainsi, satisfait à l'équation

$$\delta^3 - 6\delta - 3h = 0;$$

on en tire par tâtonnement (*) les valeurs ci-après :

$n =$ 3,	4,	5,	6,	7,	
$\delta =$ 2,6691,	2,8473,	2,7913,	2,8056,	2,8017,	
$n =$ 8,	9,	10, . . .,	∞.		
$\delta =$ 2,8027,	2,8025,	2,8025, . . .,	2,8025.		

Les valeurs de δ égales ou supérieures à celles-là étant à peu près inusitées (**), on peut dire qu'en général l'abscisse x_2

(*) Dans les cas particuliers de $n = 5$ et $n = \infty$, l'équation devient

$$\delta^3 - 6\delta - 5 = 0,$$
$$\delta^3 - 6\delta - 3\sqrt{3} = 0,$$

soit, comme on le reconnaît aisément,

$$(\delta + 1)(\delta^2 - \delta - 5) = 0,$$
$$(\delta + \sqrt{3})(\delta^2 - \delta\sqrt{3} - 3) = 0.$$

On en tire alors, par la résolution d'équations du second degré,

$$\delta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{21}) = 2{,}7913, \qquad \delta = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15}) = 2{,}8025.$$

(**) Au pont de Montluçon, sur l'Allier, on a pris $\delta = \frac{40^m}{18^m,25} = 2{,}19\ldots$; c'est le maximum réalisé, à notre connaissance, dans les ponts existants. Au reste, ce n'est pas un exemple à imiter : il arrive en effet que sous certaines surcharges les extrémités de la poutre tendent à se soulever et à quitter leurs appuis, ce qui constitue un assez grave inconvénient. — *Voir* l'ouvrage de M. Piarron de Mondésir (*Calcul des Ponts métalliques, etc.*, p. 32 et suiv.).

sera positive et plus petite que b, ou, en d'autres termes, que la parabole représentative du moment de flexion produit par la charge permanente dans une travée extrême coupe ordinairement l'axe des abscisses dans l'intervalle de la travée, non compris, bien entendu, son intersection située sur la culée même.

Le sommet de la parabole répond à $x = \frac{1}{2} x_2$ et son ordonnée a pour valeur absolue $\frac{1}{2} p \left(\frac{x_2}{2}\right)^2$; si on l'exprime encore par Cpb^2, on aura ici, pour l'expression du coefficient C,

$$(19) \qquad C = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{2X_1}{pb^2}\right)^2.$$

S'il s'agit de la travée centrale d'une poutre ayant un nombre impair de travées, on a, par raison de symétrie, $X_m = X_{m-1}$, d'où résulte

$$(20) \qquad X = X_{m-1} - \frac{1}{2} px(c - x).$$

On a d'ailleurs

$$m - 1 = \frac{1}{2}(n - 1) = q + \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$q - m + \frac{3}{2} = 0;$$

donc $M' = 1$, $N' = 0$, et la formule (13) devient

$$(21) \qquad \frac{2x}{c} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}\left[1 - \frac{2i(3 - 2\delta^2)}{N_q \delta^2 (3\delta + 2h)}\right]}.$$

Cela posé, si m est pair, il en sera de même de $q - \frac{1}{2} = m - 2$, et $\frac{N_q}{i}$ sera positif; d'un autre côté, $\frac{3 - 2\delta^2}{\delta^2(3\delta + 2h)}$ pouvant prendre une valeur quelconque entre 0 et $+\infty$, on voit qu'il existe des valeurs de δ susceptibles de rendre négative la quantité sous le radical et conséquemment les racines x_1, x_2 imaginaires. Au contraire, si m est impair, $\frac{N_q}{i}$ prend le signe —, et

le radical ne peut plus s'annuler qu'à la condition d'avoir $3-2\delta^2$ négatif ou δ supérieur à $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Mais on sait qu'alors $\frac{2\delta^2-3}{\delta^2(3\delta+2h)}$ reste en dessous d'une limite peu différente de 0,14, et comme $\frac{2i}{N_q}$ ne dépasse pas $\frac{2}{3}$ en valeur absolue, on peut en conclure que la quantité entre crochets, sous le radical de la formule (21), est forcément positive. L'énoncé donné plus haut, concernant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait possibilité de rendre imaginaires les intersections de la parabole des moments avec l'axe des x, s'applique donc, sans aucune modification, aux travées centrales.

Le sommet de la parabole qui représente l'expression (20) répond à $x=\frac{1}{2}c$; en désignant par C, comme ci-dessus, le rapport de son ordonnée à pb^2, on a

$$C=\frac{X_{m-1}}{pb^2}-\frac{1}{8}\delta^2; \tag{22}$$

l'application de la formule (16) donnerait le résultat équivalent

$$C=-\frac{1}{24}\delta^2\left[1-\frac{2i(3-2\delta^2)}{N_q\delta^2(3\delta+2h)}\right]. \tag{23}$$

Il est d'ailleurs facile de voir que si les intersections de la parabole des moments avec l'axe des x sont réelles, elles ne pourront, en général, sortir de la travée. En effet, pour $x=\frac{1}{2}c$ le moment X prend la valeur Cpb^2, forcément négative, comme le montre l'expression (23), puisque le radical de la formule (21) est réel. Donc si X_{m-1} est positif, X change de signe dans la première moitié de la travée, et aussi dans la seconde, à cause de la symétrie; cela suffit pour justifier la proposition énoncée, car le fait d'avoir $X_{m-1}<0$ n'est guère réalisable dans la pratique (n° 36).

39. *Cas particulier d'un nombre infini de travées.* — Ce cas limite présente, relativement aux abscisses x_1, x_2, quelques particularités intéressantes, dont les cas pratiques se rappro-

chent plus ou moins, à mesure qu'on fait croître le nombre des travées.

D'abord, si nous considérons une travée infiniment éloignée des extrémités, nous savons (nº 36) qu'on a

$$X_{m-1} = X_m = \frac{1}{12} pb^2\delta^2 = \frac{1}{12} pc^2;$$

par suite on tire de la formule (12)

$$\frac{2x}{c} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}},$$

ce qu'on aurait pu déduire également de la formule (13), en remarquant que les rapports $\frac{iN'}{N}$ et $\frac{iM'}{N}$ se réduisent à zéro pour q et m infinis (nº 32). Ces valeurs de x sont celles qui conviennent à une travée encastrée par les deux bouts.

Maintenant, si m a une valeur finie quelconque, l'indice $q - m + \frac{3}{2}$ étant infini, il en résulte (nºs 32 et 33)

$$M' = \infty, \quad N' = \infty, \quad \frac{N'}{M'} = \sqrt{\frac{1}{3}};$$

par conséquent les facteurs $z - \frac{N'}{M'+1}$, $z - \frac{N'}{M'-1}$ de la quantité sous le radical, dans la formule (13), deviennent égaux à $z - \sqrt{\frac{1}{3}}$, et les valeurs de x sont alors

$$\frac{2x}{c} = 1 + \frac{iN'(3 - 2\delta^2)}{N\delta^2(3\delta + 2h)} \pm \left(z - \sqrt{\frac{1}{3}}\right),$$

soit, en dédoublant le signe $\pm$, et remplaçant z ainsi que h par leurs valeurs,

$$\frac{x_1}{c} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \frac{iN'(3 - 2\delta^2)}{N\delta^2\sqrt{3}\,(2 + \delta\sqrt{3})},$$

$$\frac{x_2}{c} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0{,}788675\ldots.$$

Ainsi nous arrivons à ce résultat remarquable que l'abscisse x_2

est indépendante du rang de la travée, et qu'elle reste toujours la même que dans une travée encastrée. Quant à l'abscisse x_1, elle tend plus ou moins rapidement, suivant la valeur de δ, vers la limite $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=0,211324\ldots$, correspondante à l'encastrement, à mesure que m augmente.

Les indices q et $q-m+\frac{3}{2}$ de N et de N' étant infinis tous deux, il convient de transformer le rapport $\frac{i\text{N}'}{\text{N}}$. On a par la seconde formule (7) du n° 32, en négligeant les puissances de α'' dont l'exposant est l'infini positif,

$$\text{N}_{q-m+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\alpha'^{q-m+\frac{3}{2}},\quad \text{N}_q=\frac{1}{2\sqrt{3}}\alpha'^{q},$$

d'où

$$\frac{i\text{N}'}{\text{N}}=i\alpha'^{-m+\frac{3}{2}}=i\alpha''^{m-\frac{3}{2}}=i\alpha''^{m-2}.\alpha''^{\frac{1}{2}};$$

or on a aussi

$$\alpha''^{\frac{1}{2}}=i(1-\sqrt{3}):$$

donc enfin

$$\frac{i\text{N}'}{\text{N}}=i^2(1-\sqrt{3})\,\alpha''^{m-2}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\,\alpha''^{m-2}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\left(\text{M}_{m-2}-\text{N}_{m-2}\sqrt{3}\right).$$

Les calculs précédents ne peuvent s'appliquer à une travée extrême. Dans la première, par exemple, on a constamment $x_1=0$: quant à x_2, on a (n° 38)

$$x_2=b\,\frac{3h+6\delta-\delta^3}{2(3\delta+2h)}=\frac{b}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}+6\delta-\delta^3}{2+\delta\sqrt{3}}.$$

40. *Cas particulier* $\delta=\sqrt{\frac{3}{2}}=1,2247\ldots$ — Ce cas particulier mérite une mention, à cause de la simplicité des résultats. On a vu (n° 36) que tous les moments X_m prennent alors la valeur $\frac{1}{12}pb^2\delta^2$ ou $\frac{1}{12}pc^2$, comme si tous les appuis inter-

médiaires devenaient des encastrements. Par conséquent, la formule (12) donne

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right),$$

et les abscisses x_1, x_2 sont partout les mêmes que dans une travée encastrée ou infiniment éloignée des appuis extrêmes. On a aussi, en conservant la définition précédemment attribuée au coefficient C (nos 37 et 38),

$$C = -\frac{1}{2}\delta^2\left(\frac{x_2 - x_1}{2c}\right)^2 = -\frac{1}{24}\delta^2 = -\frac{1}{16}.$$

Dans la travée de rive A_0A_1 on a $x_1 = 0$, et, suivant la formule (18),

$$x_2 = b\left(1 - \frac{2X_1}{pb^2}\right) = b\left(1 - \frac{1}{6}\delta^2\right) = 0{,}75b;$$

la formule (19) devient donc

$$C = -\frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{6}\delta^2\right)^2 = -0{,}0703125.$$

41. *Applications numériques relatives aux conditions qui rendent les abscisses x_1 et x_2 imaginaires, ou qui les font sortir des limites 0 et c.* — Cherchons d'abord les valeurs numériques de δ dans l'intervalle desquelles x_1 et x_2 cessent d'exister réellement, en attribuant à n les valeurs impaires 3, 5, 7, ..., et à m les valeurs paires 2, 4, ..., conformément à ce qui a été dit plus haut (nos 37 et 38).

1° *Travées centrales.* — Il faut se servir de la formule (21), en supposant successivement le nombre des travées égal à 3, 7, 11, 15, ..., de manière que la travée du milieu ait un rang pair. Les valeurs correspondantes de $\frac{N_q}{i}$ et h sont (nos 32 et 33) :

$$n = 3,\quad 7,\quad 11,\quad 15,\ldots,$$

$$\frac{N_q}{i} = 1,\quad 11,\quad 153,\quad 2131,\ldots,$$

$$h = 1,\quad \frac{19}{11},\quad \frac{265}{153},\quad \frac{3691}{2131},\ldots.$$

Les racines x_1, x_2 deviendront imaginaires quand on aura

$$n = 3\ldots\ldots \quad 1 < 2\frac{3 - 2\delta^2}{\delta^2(3\delta + 2)}, \qquad \text{d'où} \quad \delta < 0,8393,$$

$$n = 7\ldots\ldots \quad 1 < 2\frac{3 - 2\delta^2}{\delta^2(33\delta + 38)}, \qquad \delta < 0,3362,$$

$$n = 11\ldots\ldots \quad 1 < 2\frac{3 - 2\delta^2}{\delta^2(459\delta + 530)}, \qquad \delta < 0,1017,$$

$$n = 15\ldots\ldots \quad 1 < 2\frac{3 - 2\delta^2}{\delta^2(6393\delta + 7382)}, \qquad \delta < 0,0282.$$

2° *Secondes* (*ou avant-dernières*) *travées.* — Nous rentrons dans le cas général discuté au n° 37 : afin de rendre x_1 et x_2 imaginaires, il faut donc choisir δ de manière que $\frac{iN'(3 - 2\delta^2)}{N\delta^2(3\delta + 2h)}$ tombe dans l'intervalle de $\frac{N'}{M' + 1}$ à $\frac{N'}{M' - 1}$. Or, les indices q et $q - m + \frac{3}{2}$ de N et de M′ ou N′ sont ici, en supposant $m = 2$,

$$\begin{array}{rcccc} n = 5, & 7, & 9, & 11, \ldots, \\ q = \frac{3}{2}, & \frac{5}{2}, & \frac{7}{2}, & \frac{9}{2}, \ldots, \\ q - m + \frac{3}{2} = 1, & 2, & 3, & 4, \ldots. \end{array}$$

On formera donc facilement, à l'aide des tableaux donnés aux n°s 32 et 33, les inégalités de condition, et l'on trouvera :

Pour cinq travées $\left(h = \frac{5}{3},\ \frac{N}{i} = -3,\ N' = -1,\ M' = -2\right)$,

$$1 > \frac{3 - 2\delta^2}{\delta^2(9\delta + 10)} > \frac{1}{3}, \quad \text{d'où} \quad 0,4343 < \delta < 0,6430\ (*);$$

(*) L'inégalité

$$1 > \frac{3 - 2\delta^2}{\delta^2(9\delta + 10)}$$

se résout sans tâtonnement, car elle revient à la suivante :

$$(\delta + 1)(3\delta^2 + \delta - 1) > 0,$$

d'où résulte immédiatement

$$\delta > \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13}).$$

Pour sept travées $\left(h = \frac{19}{11},\ \frac{N}{i} = 11,\ N' = 4,\ M' = 7\right)$,

$$\frac{2}{3} > \frac{4(3 - 2\delta^2)}{\delta^2(33\delta + 38)} > \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad 0{,}5181 < \delta < 0{,}5736;$$

Pour neuf travées $\left(h = \frac{71}{41},\ \frac{N}{i} = -41,\ N' = -15,\ M' = -26\right)$,

$$\frac{3}{5} > \frac{15(3 - 2\delta^2)}{\delta^2(123\delta + 142)} > \frac{5}{9}, \qquad 0{,}5399 < \delta < 0{,}5538;$$

Pour onze travées $\left(h = \frac{265}{153},\ \frac{N}{i} = 153,\ N' = 56,\ M' = 97\right)$,

$$\frac{7}{12} > \frac{56(3 - 2\delta^2)}{\delta^2(459\delta + 530)} > \frac{4}{7}, \qquad 0{,}5444 < \delta < 0{,}5482.$$

Comme on le voit, les deux limites de δ se resserrent de plus en plus; mais elles ne deviendraient rigoureusement égales, et le problème ne serait impossible, que pour $n = \infty$.

3° *Quatrièmes travées* (*ou travées de rang* $n - 4$). — La supposition $m = 4$ rend l'indice $q - m + \frac{3}{2}$ égal à 1 ou à 2, respectivement pour $n = 9$ et $n = 11$; on en conclut comme ci-dessus:

Pour neuf travées $\left(h = \frac{71}{41},\ \frac{N}{i} = -41,\ N' = -1,\ M' = -2\right)$,

$$1 > \frac{3 - 2\delta^2}{\delta^2(123\delta + 142)} > \frac{1}{3}, \quad \text{d'où} \quad 0{,}1365 < \delta < 0{,}2263;$$

Pour onze travées $\left(h = \frac{265}{153},\ \frac{N}{i} = 153,\ N' = 4,\ M' = 7\right)$,

$$\frac{2}{3} > \frac{4(3 - 2\delta^2)}{\delta^2(459\delta + 530)} > \frac{1}{2}, \qquad 0{,}1704 < \delta < 0{,}1944.$$

Ces résultats et quelques autres encore sont résumés dans le tableau ci-après.

NOMBRE n des travées.	LIMITES ENTRE LESQUELLES DOIT ÊTRE COMPRIS LE RAPPORT δ, pour rendre x_1 et x_2 imaginaires, quand le rang m de la travée est égal à							
	2		4		6		8	
	de	à	de	à	de	à	de	à
3	0,0000	0,8393	"	"	"	"	"	"
5	0,4343	0,6430	"	"	"	"	"	"
7	0,5181	0,5736	0,0000	0,3362	"	"	"	"
9	0,5399	0,5538	0,1365	0,2263	"	"	"	"
11	0,5444	0,5482	0,1704	0,1944	0,0000	0,1017	"	"
13	0,5458	0,5469	0,1792	0,1857	0,0383	0,0655	"	"
15	0,5462	0,5465	0,1824	0,1833	0,0483	0,0556	0,0000	0,0282

Tous les exemples qui précèdent permettent de constater ce fait, que si une valeur de δ est dans les limites convenables pour rendre imaginaires les abscisses x_1 et x_2 d'une certaine travée, elle ne jouira plus de la même propriété pour les autres travées de la même poutre, sauf, bien entendu, la travée symétrique. Il n'y aura donc, au plus, que deux travées symétriques où les intersections soient imaginaires.

Passons maintenant au calcul des valeurs de δ qui feraient franchir aux points d'intersection, supposés réels, les limites de la travée. Si nous admettons que δ a été déjà choisi de manière à rendre positifs tous les moments X_m sur les points d'appui (n° 36), il suffira (n° 37) qu'on ait $z > 1$ dans une travée de rang pair, ou $z < -1$ dans une travée de rang impair (les rangs se comptant toujours de l'extrémité la plus voisine), pour rejeter x_1 et x_2 hors de la travée. Cette condition revient à

$$\frac{iN_{q-m+\frac{3}{2}}(3-2\delta^2)}{N_q\delta^2(3\delta+2h)} > 1 \quad \text{ou} \quad < -1,$$

suivant les cas; elle prend successivement diverses expressions, en mettant des nombres au lieu de n et m : ainsi, par exemple, en faisant $n = 6$, $m = 2$, on a

$$q = \frac{1}{2}(n-2) = 2, \quad 2\left(q - m + \frac{3}{2}\right) = 3, \quad h = \frac{7}{4},$$

$$N_{q-m+\frac{3}{2}} = -3i, \quad N_q = 4,$$

ce qui donne

$$\frac{3(3-2\delta^2)}{4\delta^2(6\delta+7)} > 1,$$

$$24\delta^3 + 34\delta^2 - 9 < 0,$$

et, en résolvant par tâtonnement cette dernière inégalité,

$$\delta < 0,4484.$$

On procéderait de même avec d'autres valeurs de n et m, sauf en ce qui concerne les travées de rive, pour lesquelles la question est déjà résolue, et les travées centrales, pour lesquelles il n'y a pas à s'en occuper (n° 38). Sans entrer dans plus de détails, voici encore un tableau des résultats obtenus par l'application de cette méthode.

NOMBRE n des travées.	LIMITES AU-DESSOUS DESQUELLES DOIT ÊTRE δ pour faire sortir les abscisses x_1, x_2 de leur travée propre, quand le rang m de celle-ci est					
	2	3	4	5	6	7
4	0,4824	"	"	"	"	"
5	0,4343	"	"	"	"	"
6	0,4484	0,2853	"	"	"	"
7	0,4447	0,2494	"	"	"	"
8	0,4457	0,2598	0,1580	"	"	"
9	0,4454	0,2570	0,1361	"	"	"
10	0,4455	0,2581	0,1427	0,0847	"	"
11	0,4455	0,2576	0,1411	0,0717	"	"
12	0,4455	0,2576	0,1416	0,0762	0,0446	"
13	0,4455	0,2576	0,1414	0,0753	0,0383	"
14	0,4455	0,2576	0,1414	0,0756	0,0401	0,0233
15	0,4455	0,2576	0,1414	0,0755	0,0396	0,0200

Il serait sans doute superflu de développer davantage ce genre de problèmes. Ce qui précède suffit largement pour montrer que les limites entre lesquelles peut se mouvoir δ quand il s'agit, soit de rendre les abscisses x_1 et x_2 imaginaires, soit de les faire sortir de leur travée propre, sont en dehors des valeurs habituelles que la pratique lui assigne. Le fait en question sera donc très-rare dans les applications, bien qu'on ne puisse pas le considérer comme mathématiquement impossible.

42. *Recherche de la fonction* $F(x)$. — Si nous nommons $F(x)$, comme aux nos 26 et suivants, le quotient obtenu en divisant par p le moment de flexion dû à la charge permanente seule [lequel moment s'exprimerait, en conséquence, par $pF(x)$], il n'y aura plus maintenant aucune difficulté à déterminer complétement cette fonction. Dans une travée quelconque $A_{m-1}A_m$, de rang m, ce sera une expression parabolique de la forme

$$D_m - D'_m x + \frac{1}{2} x^2;$$

les abscisses x étant toujours comptées à partir de l'appui A_{m-1}, la comparaison de cette expression avec l'équation (11) du n° 37 donne immédiatement les valeurs des coefficients D_m et D'_m, dans une travée de rang quelconque, sauf dans la première et la dernière, savoir :

$$D_m = \frac{1}{p} X_{m-1} = b^2 \frac{X_{m-1}}{pb^2},$$

$$D'_m = \frac{1}{2} c - \frac{X_m - X_{m-1}}{pc} = b\left(\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{\delta}\cdot\frac{X_m - X_{m-1}}{pb^2}\right).$$

Pour la première travée, il faut recourir à l'équation (17) du n° 38, d'où l'on tire

$$D_1 = 0, \quad D'_1 = b\left(\frac{1}{2} - \frac{X_1}{pb^2}\right);$$

quant à la dernière, les moments y sont les mêmes que dans la première, à égale distance des culées; il est donc inutile de s'en occuper, comme, au reste, de tout ce qui concerne la seconde moitié de la poutre.

La recherche de tous ces coefficients D_m, D'_m sera, comme on le voit, d'une extrême simplicité, quand on aura effectué par les formules (7), (8), (9) du n° 35 le calcul numérique des rapports $\frac{X_m}{pb^2}$. On trouvera ce dernier calcul tout fait dans le tableau V, placé à la fin du chapitre deuxième, qui s'applique aux poutres de trois à douze travées inclusivement,

lorsque δ prend l'une des huit valeurs

0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,25, 1,3,

déjà mentionnées autre part. Nous avons même fait plus : afin de dispenser, autant que possible, les praticiens de tout usage des formules algébriques, nous avons terminé ce volume par un formulaire qui fournit, sans aucun calcul, les expressions successives de la fonction $F(x)$, pour lesdites valeurs du rapport δ et du nombre n des travées.

La parabole représentative de $\frac{F(x)}{b^2}$ aurait pour ordonnées correspondant aux points d'appui A_{m-1} et A_m les rapports $\frac{X_{m-1}}{pb^2}$, $\frac{X_m}{pb^2}$; ses intersections avec l'axe des x seraient aux distances x_1, x_2 de A_{m-1}; son sommet répondrait à l'abscisse $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ et aurait pour ordonnée C (n°s 37 et 38). Nous faisons également connaître, par les tableaux VI et VII, les abscisses x_1, x_2 et les maxima négatifs — C, ce qui complète l'ensemble des renseignements que l'on peut désirer avoir sur la fonction $F(x)$, afin de se rendre un compte suffisant de ses grandeurs successives, et, au besoin, de calculer sans peine celle qui répond à une valeur donnée de la variable, dans une travée déterminée.

Nous aurons ainsi achevé ce que nous avions à dire sur les moments fléchissants spécialement dus à la charge permanente, moments dont la connaissance facilite beaucoup, ainsi qu'on l'a vu (n°s 26 et suivants), la recherche des courbes enveloppes.

43. *Remarques sur la disposition, la construction et l'usage des tableaux* V, VI *et* VII. — La disposition de ces tableaux est assez claire pour qu'on la comprenne à première vue : il y a donc peu de chose à en dire. En raison de la symétrie, les moments X_m, X_{n-m} sont égaux : c'est pourquoi chacun des rapports $\frac{X_m}{pb^2}$ inscrits dans le tableau V répond à deux valeurs de l'indice m, qui figurent à gauche des pages, sur la même ligne horizontale. (Nous rappelons que p désigne le poids par mètre

courant, X_m le moment sur l'appui A_m, c'est-à-dire sur la $m^{ième}$ pile à partir d'une culée A_0, celle-ci n'étant pas comptée; δ le rapport de l'ouverture c d'une travée intermédiaire, à l'ouverture b d'une travée de rive.)

Les abscisses x_1, x_2 des points où le moment dû à la charge permanente devient nul (n° 42) sont données par le tableau VI, et définies par leur rapport à la longueur de la travée correspondante. Pour chaque valeur du nombre n des travées, on n'a calculé que les résultats relatifs aux travées dont le numéro d'ordre ne dépasse pas $\frac{n}{2}$ si n est pair, ou $\frac{n+1}{2}$ si n est impair; cela suffit évidemment, puisque la seconde moitié de la poutre doit reproduire symétriquement ce qui existe dans la première. Il est bien entendu, ici comme partout ailleurs dans cet ouvrage, que le rang d'une travée se compte toujours (sauf indication contraire) à partir de la rive la plus voisine. Les valeurs de n commencent à 3 et vont sans interruption jusqu'à 12 inclusivement; on a calculé aussi les limites des abscisses en question, dans chaque travée, pour le cas de $n=\infty$, ce qui a toujours conduit à des valeurs très-peu différentes de celles qu'on avait obtenues avec $n=12$. Le tableau VI est donc applicable quel que soit le nombre des travées.

Le tableau VII donne lieu à peu près aux mêmes observations. Mais comme on n'a conservé que les trois premiers chiffres significatifs de chaque nombre, les limites pour $n=\infty$ sont plus rapidement atteintes dans chaque travée; alors le tableau partiel qui lui correspond se termine par une ligne de points qui est censée reproduire indéfiniment les résultats de la ligne immédiatement supérieure. Ces résultats sont donc vrais pour toute valeur de n dépassant la dernière inscrite dans le tableau partiel en question : par exemple, si l'on prenait $\delta=1$, $n=15$, la valeur de $-C$ serait 0,0778 pour la première travée, 0,0339 pour la seconde, etc. Quant aux limites vers lesquelles tend $-C$ quand le rang de la travée augmente de plus en plus, on les déduit sans peine des valeurs de x_1 et x_2 trouvées au n° 39; on a ainsi

$$\lim(-C)=\frac{1}{24}\delta^2,$$

ce qui, avec nos huit valeurs de δ, donne successivement

0,0204, 0,0267, 0,03375, 0,0417,
0,0504, 0,0600, 0,0651, 0,0704.

Ces limites sont exactement ou très-approximativement atteintes dans la sixième travée d'une poutre à douze travées : on peut donc admettre qu'elles le seraient toujours dans une travée de rang supérieur à 6, n étant au moins égal à 13. Par conséquent le tableau VII devient illimité, comme le tableau VI, en ce qui concerne le nombre des travées.

On remarque dans le tableau VII deux résultats imprimés en chiffres plus fins, qui se rapportent à la travée centrale d'une poutre à trois travées, pour laquelle δ prendrait l'une des valeurs 0,7 ou 0,8. La raison de cette distinction, c'est que les abscisses x_1 et x_2 étant imaginaires, leur moyenne répond à un minimum et non à un maximum du moment fléchissant.

Les tableaux VI et VII se construisent par l'application directe et immédiate des formules (12) ou (13), (16), (18), (19), (21), (22) ou (23), jointes à celles du n° 39 : il n'y a qu'à rechercher les valeurs des indices qui déterminent les valeurs à mettre pour les nombres M, N, h, et l'on obtient alors des formules où δ est le seul argument (puisque α'' est un nombre déterminé). Nous ne connaissons pas d'artifice particulier propre à rendre les opérations plus rapides; on peut seulement profiter, quand le cas se présente, de ce que certaines quantités figurent dans plusieurs formules, ce qui permet de les calculer une fois pour toutes. Pour ce qui concerne le tableau V, obtenu par l'application de la formule (8), il y a peut-être un léger avantage à en disposer le calcul comme il suit.

Si, par exemple, nous voulons avoir les X_m dans une poutre à 12 travées, δ étant égal à 1,2, nous chercherons d'abord

$$3-2\delta^2=0{,}12,$$
$$3\delta+2h=3.1{,}2+2\cdot\frac{362}{209}=\frac{1}{209}\cdot 1476{,}4,$$

puis le quotient

$$\frac{1}{209}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}=\frac{0{,}12}{1476{,}4}=0{,}000081278786\ldots,$$

que nous désignerons par t. Ceci posé, comme $n=12$, on aura ici

$$q=\frac{1}{2}(n-2)=5,\quad N_q=-209,$$

et de plus

pour le 1er appui A_1...... $m = 1$. $q+1-m = 5$. $M_{q+1-m} = -362$,
2e appui A_2...... $m = 2$. $q+1-m = 4$, $M_{q+1-m} = 97$.
3e appui A_3...... $m = 3$. $q+1-m = 3$. $M_{q+1-m} = -26$.
4e appui A_4...... $m = 4$. $q+1-m = 2$. $M_{q+1-m} = 7$;
5^e^ appui A_5...... $m = 5$, $q+1-m = 1$. $M_{q+1-m} = -2$.
6^e^ appui A_6...... $m = 6$. $q+1-m = 0$. $M_{q+1-m} = 1$.

La formule (8) donnera donc

$$\frac{12X_1}{pb^2} = \delta^2 + 362t,$$
$$\frac{12X_2}{pb^2} = \delta^2 - 97t.$$
$$\frac{12X_3}{pb^2} = \delta^2 + 26t.$$
$$\frac{12X_4}{pb^2} = \delta^2 - 7t.$$
$$\frac{12X_5}{pb^2} = \delta^2 + 2t,$$
$$\frac{12X_6}{pb^4} = \delta^2 - t.$$

Or (et c'est en ceci que consiste la simplification que nous avions en vue), on arrive assez vite à former la suite

$$t,\quad 2t,\quad 7t,\quad 26t,\quad 97t,\quad 362t,$$

en remarquant que chaque nombre est égal à quatre fois le précédent moins l'antéprécédent : ainsi $97t = 4.26t - 7t$, ce qui tient à la loi même des séries M et N (n° 32). Après avoir calculé $2t$ et $7t$ par de simples multiplications, on en déduira donc $26t$, $97t$, $362t$, savoir (*) :

$10^4.t$,	$10^4.2t$,	$10^4.7t$,
0,81278786,	1,62557572,	5,68951502,
$10^4.26t$,	$10^4.97t$,	$10^4.362t$,
21,13248436,	78,84042242,	294,22920532.

De là on conclut par des additions ou soustractions les valeurs de

(*) Avec un peu d'habitude on arrive sans peine à faire simultanément la multiplication par 4 et la soustraction, de sorte qu'on écrit les termes de la série les uns sous les autres, sans calculs accessoires.

$\frac{12\,X_m}{pb^2}$, savoir, en se bornant à huit chiffres décimaux :

$$\frac{12\,X_1}{pb^2} = \delta^2 + 362\,t = 1{,}46942292,$$
$$\frac{12\,X_2}{pb^2} = \delta^2 - 97\,t = 1{,}43211596,$$
$$\frac{12\,X_3}{pb^2} = \delta^2 + 26\,t = 1{,}44211325,$$
$$\frac{12\,X_4}{pb^2} = \delta^2 - 7\,t = 1{,}43943105,$$
$$\frac{12\,X_5}{pb^2} = \delta^2 + 2\,t = 1{,}44016256,$$
$$\frac{12\,X_6}{pb^2} = \delta^2 - t = 1{,}43991872;$$

et enfin, si l'on divise ces résultats par 12, on a

$$\frac{X_1}{pb^2} = 0{,}12245191, \quad \frac{X_2}{pb^2} = 0{,}11934300, \quad \frac{X_3}{pb^2} = 0{,}12017610,$$
$$\frac{X_4}{pb^2} = 0{,}11995259, \quad \frac{X_5}{pb^2} = 0{,}12001355, \quad \frac{X_6}{pb^2} = 0{,}11999323.$$

D'ailleurs il est inutile de s'occuper des indices supérieurs à 6, car la symétrie donne immédiatement

$$X_{11} = X_1, \quad X_{10} = X_2, \quad X_9 = X_3, \quad X_8 = X_4, \text{ etc.}$$

Terminons en donnant quelques exemples de l'usage des tableaux en question.

Premier exemple. — On donne une poutre de six travées; les travées extrêmes ont 50 mètres d'ouverture, et les autres ont $62^m,50$; le poids, par mètre courant de la charge permanente est $p = 4000$ kilogrammes; on demande les moments de flexion que cette charge produit sur les points d'appui. Il faut supposer ici

$$\delta = \frac{c}{b} = \frac{62^m,50}{50^m} = 1{,}25 :$$

le tableau V donnera en conséquence

$$X_1 = X_5 = 0{,}127694\,pb^2 = 1276940,$$
$$X_2 = X_4 = 0{,}130927\,pb^2 = 1309270,$$
$$X_3 = 0{,}129849\,pb^2 = 1298490,$$

l'unité de moment étant le kilogramme agissant avec 1 mètre pour bras de levier.

Deuxième exemple. — On demande, avec les mêmes données, quels sont les points de la poutre où le moment de flexion s'annule. Ces points se trouvent définis par les abscisses x_1, x_2; on aura donc successivement, par le tableau VI :

Dans la première travée, outre l'appui-culée A_0, le point situé à la distance

$$x_2 = 0{,}74461.b = 37^m{,}231 \text{ de } A_0;$$

Dans la seconde travée, les points situés aux distances de l'appui A_1

$$x_1 = 0{,}20726.c = 12^m{,}954, \quad x_2 = 0{,}78860.c = 49^m{,}287;$$

Dans la troisième travée, les points situés aux distances de l'appui A_2

$$x_1 = 0{,}21241.c = 13^m{,}276, \quad x_2 = 0{,}78897.c = 49^m{,}311;$$

Dans les travées suivantes, des points reproduisant symétriquement ceux qu'on a déjà trouvés.

Cette considération de symétrie explique pourquoi, sous la rubrique « quatrième travée », par exemple, on ne fait figurer, dans la première colonne à gauche du tableau VI, que les poutres de sept travées au moins; c'est que dans une poutre à six travées il n'y a réellement que trois travées à étudier : une première, commençant à l'une des culées; puis, en marchant vers le milieu, une seconde, puis une troisième. Il y aurait de même trois travées distinctes pour une poutre de cinq travées; deux pour une poutre de quatre ou de trois, etc.

Troisième exemple. — On demande, toujours pour la même poutre, l'ordonnée du sommet de la parabole représentative des moments, dans chaque travée. Ces ordonnées ont été désignées plus haut par $-Cpb^2$; elles seront donc, d'après le tableau VII :

Première travée.

$0{,}0693pb^2$ ou 693000, répondant à l'abscisse $\frac{1}{2}x_1 = 18^m{,}615$;

Deuxième travée.

$0{,}0660pb^2$ ou 660000, répondant à l'abscisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 31^m{,}621$;

Troisième travée.

$0{,}0649pb^2$ ou 649000, répondant à l'abscisse $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 31^m{,}293$.

Résultats symétriques dans les travées suivantes.

§ III. — Effet spécial de la surcharge. — Division de chaque travée en régions, par les abscisses x', x'', x''', x^{IV}.

44. *Des abscisses x', x'', x''', x^{IV}.* — On se rappelle (n° 26) que lorsqu'on cherche les courbes enveloppes des moments, sous la seule action de la surcharge, dans une travée de rang quelconque $A_{m-1}A_m$, on trouve ces courbes composées de plusieurs arcs de parabole ou fragments de droite, se succédant les uns aux autres à partir de points bien définis, dont les abscisses, comptées à partir de A_{m-1}, ont été désignées par x', x'', x''', x^{IV}. Il convient de s'occuper, en premier lieu, de la recherche de ces abscisses, dans le cas des poutres dont il est ici question.

Nous savons qu'on a

$$x'' = c\,\frac{\beta}{1+\beta}, \quad x''' = c\left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}\right),$$

c étant, ainsi qu'au paragraphe précédent, la longueur de la travée, et β, γ étant deux nombres des séries β, γ, spécialement relatifs à la travée dont il s'agit. Pour éviter tout malentendu à cet égard, nous rétablirons les indices : comme le rang est m d'un côté, $n-m+1$ de l'autre, β et γ représentent respectivement β_{m-1} et γ_{n-m}, soit encore β_{m-1} et β_{n-m}, puisque les séries β et γ coïncident dans le cas actuel (n° 31). Ainsi nous écrirons

$$(1) \qquad x'' = c\,\frac{\beta_{m-1}}{1+\beta_{m-1}}, \quad x''' = c\left(1 - \frac{\beta_{n-m}}{1+\beta_{n-m}}\right)$$

ou bien, attendu que β_{m-1} exprime généralement le rapport $-\frac{u_{m-1}}{u_m}$,

$$(2) \qquad x'' = c\,\frac{u_{m-1}}{u_{m-1}-u_m}, \quad x''' = c\left(1 - \frac{u_{n-m}}{u_{n-m}-u_{n-m+1}}\right).$$

Le calcul des nombres u étant fait, on en déduira facilement x'' et x'''; on pourra encore, dans les formules (2), remplacer

les u par leurs valeurs (15) du n° 33, et il viendra

$$(3)\quad \begin{cases} x'' = c\,\dfrac{2N_{m-2} + M_{m-2}\delta}{2(N_{m-2} - N_{m-1}) + (M_{m-2} - M_{m-1})\delta}, \\ x''' = c\left[1 - \dfrac{2N_{n-m-1} + M_{n-m-1}\delta}{2(N_{n-m-1} - N_{n-m}) + (M_{n-m-1} - M_{n-m})\delta}\right], \end{cases}$$

formules qui dispenseraient de calculer préalablement la série des u. On pourrait également, si l'on voulait, exprimer N_{m-1} et M_{m-1} en fonction de M_{m-2}, N_{m-2}; puis N_{n-m}, M_{n-m} en fonction de M_{n-m-1}, N_{n-m-1} : on n'aurait ainsi conservé qu'un seul indice dans chaque formule. Mais il nous a semblé que cette transformation offrait peu d'avantages.

Dans les travées extrêmes, les points répondant aux abscisses x'', x''' coïncident avec les appuis-culées A_0 ou A_n : on ne doit plus employer les formules ci-dessus pour les rechercher.

Lorsque les indices m ou $n - m + 1$ deviennent grands, les rapports $\frac{x''}{c}$, $\frac{x'''}{c}$ convergent assez rapidement vers des limites qu'il est aisé d'indiquer. On a vu en effet (n° 33) que

$$\lim \beta = -\alpha'' = 2 - \sqrt{3};$$

donc les limites demandées seront

$$\lim \frac{x''}{c} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{6}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0{,}21132\ldots,$$
$$\lim \frac{x'''}{c} = 1 - \lim \frac{x''}{c} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0{,}78868\ldots.$$

Or ces limites sont celles qu'on a déjà reconnues (n° 39) aux abscisses x_1, x_2 des points où la parabole représentative des moments de la charge permanente coupe l'axe des x : il y aura donc souvent confusion approximative entre les points des deux espèces.

Les valeurs des deux autres abscisses x', x^{IV} peuvent se calculer dans toute travée intermédiaire, par la formule (5) du n° 20, que nous transcrivons ici de nouveau, en rétablissant les

indices de β et de γ, pour plus de clarté, et en tenant compte de l'identité des séries β, γ :

$$(4)\left\{\begin{aligned}\frac{2x}{c} &= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta_{m-1}-\beta_{n-m}}{1-\beta_{m-1}\beta_{n-m}}\\ &\pm\sqrt{\frac{(1-\beta_{m-1})(1-\beta_{n-m})}{1-\beta_{m-1}\beta_{n-m}}+\frac{1}{4}\left(\frac{\beta_{m-1}-\beta_{n-m}}{1-\beta_{m-1}\beta_{n-m}}\right)^2};\end{aligned}\right.$$

le signe — du radical donnerait x', et le signe + donnerait x^{IV}. La série β ayant été calculée plus haut (n°s 33 et 34), cette formule s'appliquerait sans difficulté sérieuse. On peut encore, pour continuer à faire ce que nous avons fait déjà dans d'autres circonstances, évaluer x', x^{IV} en fonction de δ, m, n : voici comment on procéderait.

On a, suivant la deuxième formule (18) du n° 33,

$$\beta_{m-1} = -\frac{2N_{m-2}+M_{m-2}\delta}{2N_{m-1}+M_{m-1}\delta},$$

$$\beta_{n-m} = -\frac{2N_{n-m-1}+M_{n-m-1}\delta}{2N_{n-m}+M_{n-m}\delta},$$

et par suite, si l'on nomme P le produit des deux dénominateurs,

$$\begin{aligned}&P(\beta_{m-1}-\beta_{n-m})\\ &= 4(N_{m-1}N_{n-m-1}-N_{m-2}N_{n-m})+(M_{m-1}M_{n-m-1}-M_{m-2}M_{n-m})\delta^2\\ &\quad+2\delta(M_{m-1}N_{n-m-1}+M_{n-m-1}N_{m-1}-M_{m-2}N_{n-m}-M_{n-m}N_{m-2}).\end{aligned}$$

Or les formules (10) et (14) du n° 32 permettent d'écrire

$$N_{m-1}N_{n-m-1} = \frac{1}{6}(M_{n-2}-M_{n-2m}),$$

$$N_{m-2}N_{n-m} = \frac{1}{6}(M_{n-2}-M_{n-2m+2}),$$

$$\begin{aligned}N_{m-1}N_{n-m-1}-N_{m-2}N_{n-m} &= \frac{1}{6}(M_{n-2m+2}-M_{n-2m}) = N_1N_{n-2m+1}\\ &= -N_{n-2m+1};\end{aligned}$$

$$M_{m-1}M_{n-m-1} = \frac{1}{2}(M_{n-2}+M_{n-2m}),$$

$$M_{m-2}M_{n-m} = \frac{1}{2}(M_{n-2} + M_{n-2m+2}),$$

$$M_{m-1}M_{n-m-1} - M_{m-2}M_{n-m} = \frac{1}{2}(M_{n-2m} - M_{n-2m+2}) = 3N_{n-2m+1};$$

$$M_{m-1}N_{n-m-1} + M_{n-m-1}N_{m-1} = N_{n-2},$$

$$M_{m-2}N_{n-m} + M_{n-m}N_{m-2} = N_{n-2}:$$

donc

(5) $$P(\beta_{m-1} - \beta_{n-m}) = -N_{n-2m+1}(4 - 3\delta^2).$$

Un calcul analogue nous donnera le binôme $1 - \beta_{m-1}\beta_{n-m}$:

$$\begin{aligned} &P(1 - \beta_{m-1}\beta_{n-m}) \\ &= 4(N_{m-1}N_{n-m} - N_{m-2}N_{n-m-1}) + (M_{m-1}M_{n-m} - M_{m-2}M_{n-m-1})\delta^2 \\ &\quad + 2\delta(M_{m-1}N_{n-m} + M_{n-m}N_{m-1} - M_{m-2}N_{n-m-1} - M_{n-m-1}N_{m-2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{m-1}N_{n-m} - N_{m-2}N_{n-m-1} &= \frac{1}{6}(M_{n-1} - M_{n-2m+1} - M_{n-3} + M_{n-2m+1}) \\ &= \frac{1}{6}(M_{n-1} - M_{n-3}) = N_1N_{n-2} = -N_{n-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{m-1}M_{n-m} - M_{m-2}M_{n-m-1} &= \frac{1}{2}(M_{n-1} + M_{n-2m+1} - M_{n-3} - M_{n-2m+1}) \\ &= -3N_{n-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M_{m-1}N_{n-m} + M_{n-m}N_{m-1} - M_{m-2}N_{n-m-1} - M_{n-m-1}N_{m-2} \\ &= N_{n-1} - N_{n-3} = 2N_1M_{n-2} = -2M_{n-2}; \end{aligned}$$

(6) $$P(1 - \beta_{m-1}\beta_{n-m}) = -(4 + 3\delta^2)N_{n-2} - 4\delta M_{n-2}.$$

De même, nous chercherons $1 - \beta_{m-1}$, $1 - \beta_{n-m}$, et leur produit :

$$1 - \beta_{m-1} = \frac{2(N_{m-1} + N_{m-2}) + (M_{m-1} + M_{m-2})\delta}{2N_{m-1} + M_{m-1}\delta},$$

$$N_{m-1} + N_{m-2} = 2M_{\frac{1}{2}}N_{m-\frac{3}{2}} = 2iN_{m-\frac{3}{2}},$$

$$M_{m-1} + M_{m-2} = 2M_{\frac{1}{2}}M_{m-\frac{3}{2}} = 2iM_{m-\frac{3}{2}},$$

$$1 - \beta_{m-1} = \frac{2i\left(2N_{m-\frac{3}{2}} + \delta M_{m-\frac{3}{2}}\right)}{2N_{m-1} + \delta M_{m-1}};$$

un changement d'indice donne de suite

$$1 - \beta_{n-m} = \frac{2i\left(2N_{n-m-\frac{1}{2}} + \delta M_{n-m-\frac{1}{2}}\right)}{2N_{n-m} + \delta M_{n-m}}:$$

par suite, en multipliant membre à membre les deux dernières équations et remplaçant $4i^2$ par -2, il vient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &P(1-\beta_{m-1})(1-\beta_{n-m}) \\ &\quad = -2\left(2N_{m-\frac{3}{2}}+\delta M_{m-\frac{3}{2}}\right)\left(2N_{n-m-\frac{1}{2}}+\delta M_{n-m-\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad = -8N_{m-\frac{3}{2}}N_{n-m-\frac{1}{2}} - 4\delta\left(M_{n-m-\frac{1}{2}}N_{m-\frac{3}{2}}+M_{m-\frac{3}{2}}N_{n-m-\frac{1}{2}}\right) \\ &\qquad -2\delta^2 M_{m-\frac{3}{2}}M_{n-m-\frac{1}{2}} \\ &\quad = -\frac{4}{3}(M_{n-2}-M_{n-2m+1}) - 4\delta N_{n-2} - \delta^2(M_{n-2}+M_{n-2m+1}). \end{aligned}\right.$$

Les expressions fournies par les équations (5), (6) et (7) étant portées dans la formule (4), celle-ci devient

$$(8)\qquad \frac{2x}{c} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{(4-3\delta^2)N_{n-2m+1}}{(4+3\delta^2)N_{n-2}+4\delta M_{n-2}} \pm \sqrt{R},$$

en désignant par R la quantité

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(4+3\delta^2)M_{n-2}+12\delta N_{n-2}-(4-3\delta^2)M_{n-2m+1}}{(4+3\delta^2)N_{n-2}+4\delta M_{n-2}} + \frac{1}{4}\left[\frac{(4-3\delta^2)N_{n-2m+1}}{(4+3\delta^2)N_{n-2}+4\delta M_{n-2}}\right]^2.$$

Quelle que soit celle des deux formules (4) ou (8) que l'on préfère, le calcul en sera toujours un peu pénible; mais l'un des tableaux numériques donnés plus loin dispensera de l'appliquer dans les cas ordinaires, car il fournira immédiatement le résultat pour les huit valeurs de δ déjà considérées, m et n restant quelconques; et, au moyen d'interpolations, on aurait x' et x^{IV} pour toute valeur de δ comprise entre les limites 0,7 et 1,3.

On remarque d'ailleurs, quand on s'occupe de la construction d'un tel tableau par l'application de la formule (4), que β_{m-1} et β_{n-m} convergent assez rapidement vers leur limite $2-\sqrt{3} = 0{,}2679492$, et que par conséquent cette formule tend à donner des résultats indépendants du rang m de la travée considérée, et du nombre n des travées, pour peu que les nombres m et n atteignent, le premier 4 ou 5, le second 9 ou 10. Cela nous a suggéré l'idée de développer x' et x^{IV} en fonction des différences (rapidement décroissantes avec l'indice) entre β_{m-1} et β_{n-m} d'une part, et leur

limite commune, d'autre part. Soient donc

$$2-\sqrt{3}=l,$$
$$\beta_{m-1}=l-\lambda,$$
$$\beta_{n-m}=l-\mu;$$

on aura, d'après ces notations,

$$\beta_{m-1}-\beta_{n-m}=\mu-\lambda,$$
$$1-\beta_{m-1}\beta_{n-m}=1-l^2+l(\lambda+\mu)-\lambda\mu$$
$$=(1-l^2)\left[1+\frac{l}{1-l^2}(\lambda+\mu)-\frac{\lambda\mu}{1-l^2}\right].$$

Donc

$$\frac{1}{1-\beta_{m-1}\beta_{n-m}}=\frac{1}{1-l^2}\left[1+\frac{l}{1-l^2}(\lambda+\mu)-\frac{\lambda\mu}{1-l^2}\right]^{-1},$$

soit, en développant la quantité entre crochets, par la formule du binôme, et négligeant les termes d'ordre supérieur au second en λ, μ,

$$\frac{1}{1-\beta_{m-1}\beta_{n-m}}=\frac{1}{1-l^2}\left[1-\frac{l}{1-l^2}(\lambda+\mu)+\frac{\lambda\mu}{1-l^2}+\frac{l^2}{(1-l^2)^2}(\lambda+\mu)^2\right].$$

De même on a

$$(1-\beta_{m-1})(1-\beta_{n-m})=(1-l+\lambda)(1-l+\mu)$$
$$=(1-l)^2\left[1+\frac{\lambda+\mu}{1-l}+\frac{\lambda\mu}{(1-l)^2}\right].$$

Par suite, on forme l'expression des quantités qui entrent dans la formule (4), savoir, en négligeant toujours les termes au-dessus du second ordre :

$$\frac{\beta_{m-1}-\beta_{n-m}}{1-\beta_{m-1}\beta_{n-m}}=\frac{\mu-\lambda}{1-l^2}-\frac{l(\mu^2-\lambda^2)}{(1-l^2)^2},$$

$$\frac{(1-\beta_{m-1})(1-\beta_{n-m})}{1-\beta_{m-1}\beta_{n-m}}=\frac{(1-l)^2}{1-l^2}\left[1+\frac{\lambda+\mu}{1-l}+\frac{\lambda\mu}{(1-l)^2}\right]$$
$$\times\left[1-\frac{l}{1-l^2}(\lambda+\mu)+\frac{\lambda\mu}{1-l^2}+\frac{l^2}{(1-l^2)^2}(\lambda+\mu)^2\right]$$
$$=\frac{1-l}{1+l}\left[1+\frac{\lambda+\mu}{1-l^2}+\frac{2\lambda\mu}{(1-l^2)^2}-\frac{l(\lambda^2+\mu^2)}{(1-l^2)^2}\right];$$

$$\left(\frac{\beta_{m-1}-\beta_{n-m}}{1-\beta_{m-1}\beta_{n-m}}\right)^2=\frac{(\mu-\lambda)^2}{(1-l^2)^2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans celle de $\frac{2x}{c}$, et qu'on développe le radical par la formule du binôme, bornée aux termes du second ordre, on

trouve

$$\frac{2x}{c} = 1 + \frac{\mu - \lambda}{2(1-l^2)} - \frac{l(\mu^2 - \lambda^2)}{2(1-l^2)^2}$$
$$\pm \sqrt{\frac{1-l}{1+l}}\left[1 + \frac{\lambda + \mu}{2(1-l^2)} + \frac{\lambda\mu(1-2l)}{2(1-l)(1-l^2)^2} - \frac{(\lambda^2+\mu^2)(1-2l)l}{4(1-l)(1-l^2)^2}\right].$$

La limite l étant égale à $2-\sqrt{3}$, on peut encore vérifier aisément les relations

$$\frac{1-l}{1+l} = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad 1 - 2l = l\sqrt{3}, \quad 1 - l^2 = 2l\sqrt{3},$$

ce qui permet d'écrire plus simplement

$$\frac{2x}{c} = 1 + \frac{\mu - \lambda}{4l\sqrt{3}} - \frac{\mu^2 - \lambda^2}{24l}$$
$$\pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\left[1 + \frac{\lambda + \mu}{4l\sqrt{3}} + \frac{\lambda\mu}{8\sqrt{3}\,l(1-l)} - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{16\sqrt{3}(1-l)}\right]$$

ou bien, en mettant $2-\sqrt{3}$ au lieu de l,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2x}{c} &= 1 + \frac{1}{4}(\mu - \lambda)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) - \frac{1}{24}(\mu^2 - \lambda^2)\left(2 + \sqrt{3}\right) \\ &\pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\left[1 + \frac{1}{4}(\lambda + \mu)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{16}\lambda\mu\left(\frac{5}{\sqrt{3}} + 3\right) - \frac{1}{32}(\lambda^2 + \mu^2)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Enfin, on peut réduire en nombres cette dernière formule, et l'on obtiendra, en dédoublant le signe $\pm$:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x'}{c} &= 0{,}12008216 - 0{,}4739899\lambda + 0{,}0646853\mu \\ &\quad + 0{,}096478\lambda^2 - 0{,}059024\mu^2 - 0{,}139828\lambda\mu, \\ \frac{x^{\text{IV}}}{c} &= 0{,}87991784 - 0{,}0646853\lambda + 0{,}4739899\mu \\ &\quad + 0{,}059024\lambda^2 - 0{,}096478\mu^2 + 0{,}139828\lambda\mu. \end{aligned}\right.$$

Ces formules sont déjà très-exactes dans la seconde travée, du moins quand on prend δ entre 0,7 et 1,3; dans la troisième et les suivantes, il devient inutile de conserver les termes du second ordre, et l'on a des expressions linéaires en λ, μ, d'autant plus commodes que la petitesse de ces quantités permet de prendre leurs coefficients avec beaucoup moins de décimales que nous n'en avons mis ci-dessus.

Exemple. — On demande $\frac{x'}{c}$ et $\frac{x^{\text{IV}}}{c}$, dans la seconde travée d'une poutre à quatre travées, δ étant égal à 0,7. On prend dans le tableau III :

$$\beta_{m-1} = \beta_1 = 0,2058824,$$
$$\beta_{n-m} = \beta_2 = 0,2635659,$$

d'où résultent

$$\lambda = 2 - \sqrt{3} - 0,2058824 = 0,0620668,$$
$$\mu = 2 - \sqrt{3} - 0,2635659 = 0,0043833,$$

et en vertu des formules (10),

$$\frac{x'}{c} = 0,09127, \quad \frac{x^{\text{IV}}}{c} = 0,87824;$$

le calcul fait avec la formule exacte nous a donné

$$\frac{x'}{c} = 0,09127, \quad \frac{x^{\text{IV}}}{c} = 0,87823,$$

c'est-à-dire très-sensiblement les mêmes chiffres.

45. *Cas particuliers d'une travée extrême et d'une travée centrale.* — Nous avons déjà dit que dans la première travée, par exemple, les points définis par x'', x''' répondent à la culée A_0, c'est-à-dire qu'on a

$$x'' = x''' = 0;$$

il en est de même de x' (n° 20), et x^{IV} est donné par l'équation

$$(11) \qquad \frac{x^{\text{IV}}}{b} = 1 - \frac{1}{2}\gamma = 1 - \frac{1}{2}\beta_{n-1},$$

formule où tout est connu, puisqu'on a calculé β_{n-1} (n°s 33 et 34).

Dans la dernière travée on trouverait les mêmes résultats, en comptant les distances à partir de la culée A_n.

Dans une travée centrale, il faut, par raison de symétrie, faire $\beta_{m-1} = \beta_{n-m}$: la formule (4) devient alors

$$(12) \qquad \frac{2x}{c} = 1 \pm \sqrt{\frac{1 - \beta_{m-1}}{1 + \beta_{m-1}}}.$$

Nous avons déjà trouvé (n° 44)

$$1 - \beta_{m-1} = \frac{2i\left(2N_{m-\frac{3}{2}} + \delta M_{m-\frac{3}{2}}\right)}{2N_{m-1} + \delta M_{m-1}};$$

on aura, par un procédé analogue,

$$1 + \beta_{m-1} = 1 - \frac{2N_{m-2} + \delta M_{m-2}}{2N_{m-1} + \delta M_{m-1}}$$
$$= \frac{2(N_{m-1} - N_{m-2}) + \delta(M_{m-1} - M_{m-2})}{2N_{m-1} + \delta M_{m-1}},$$

ou bien, en remplaçant $N_{m-1} - N_{m-2}$ et $M_{m-1} - M_{m-2}$ par leurs valeurs respectives $2iM_{m-\frac{3}{2}}$, $6iN_{m-\frac{3}{2}}$, que donnent les formules (14) du n° 32 (*),

$$1 + \beta_{m-1} = \frac{2i\left(2M_{m-\frac{3}{2}} + 3\delta N_{m-\frac{3}{2}}\right)}{2N_{m-1} + \delta M_{m-1}}.$$

Donc

$$\frac{1 - \beta_{m-1}}{1 + \beta_{m-1}} = \frac{2N_{m-\frac{3}{2}} + \delta M_{m-\frac{3}{2}}}{2M_{m-\frac{3}{2}} + 3\delta N_{m-\frac{3}{2}}}.$$

D'un autre côté, m est ici égal à $\frac{1}{2}(n+1)$ ou à $q + \frac{3}{2}$, si nous désignons, comme d'habitude, par $2q$ la différence $n-2$; l'indice $m - \frac{3}{2}$ est donc égal à q, et comme le quotient $\frac{M_q}{N_q}$ n'est autre chose que le nombre h_{n-2} ou h sans indice, on peut écrire

$$\frac{1 - \beta_{m-1}}{1 + \beta_{m-1}} = \frac{2 + h\delta}{3\delta + 2h},$$

et enfin

$$(13) \qquad \frac{2x}{c} = 1 \pm \sqrt{\frac{2 + h\delta}{3\delta + 2h}}.$$

Le même résultat aurait pu se déduire de la formule (8), mais par un calcul un peu plus long.

(*) Il faudrait prendre la seconde et la quatrième de ces formules et y faire $k = m - \frac{3}{2}$, $l = \frac{1}{2}$, $N_{\frac{1}{2}} = M_{\frac{1}{2}} = i$.

Quant à x'' et x''', la circonstance que β_{n-1} soit égal à β_{n-m} ne donne lieu à aucune remarque particulière, sauf que x'' devient égal à $c - x'''$, c'est-à-dire que la somme des deux abscisses fait la longueur de la travée. Ce fait résulte de la symétrie, comme conséquence immédiate.

46. *Cas particulier d'un nombre infini de travées.* — Si n devient infini, cela n'apporte aucun changement à la valeur de x'', qui dépend seulement du rang m de la travée dont on s'occupe; mais, $n-m$ étant supposé infini, et m différent de 1, x''' passe à la limite $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})c$ ou $0,78868c$, qu'on lui a reconnue plus haut. Pour $m=1$, on a encore, bien entendu,

$$x''' = x'' = 0.$$

L'hypothèse $n=\infty$ et m fini, introduite dans la formule (4) qui donne x' et x^{iv}, n'y produit pas de simplification bien sensible : il faut remarquer seulement que β_{n-m} doit se remplacer par sa limite $2-\sqrt{3}$ ou $0,2679492$. Pour ce qui concerne la formule (8), on observe d'abord que les puissances infinies et positives de α'' étant négligeables, on a, par les formules (7) du n° 32,

$$M_{n-2m+1} = \frac{1}{2}\alpha'^{n-2m+1} = \frac{1}{2}\alpha''^{2m-3}\alpha'^{n-2},$$

$$M_{n-2} = \frac{1}{2}\alpha'^{n-2},$$

d'où résulte

$$M_{n-2m+1} = M_{n-2}\alpha''^{2m-3},$$

et, par un calcul tout semblable,

$$N_{n-2m+1} = N_{n-2}\alpha''^{2m-3};$$

substituant ces valeurs dans la formule (8) et observant que pour $n=\infty$ le rapport $\frac{M_{n-2}}{N_{n-2}}$ prend (n° 33) sa valeur limite $\sqrt{3}$, on trouve

$$\frac{2x}{c} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{(4-3\delta^2)\alpha''^{2m-3}}{4+3\delta^2+4\delta\sqrt{3}} \pm \sqrt{R'},$$

R′ désignant ici la quantité

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(4+3\delta^2)\sqrt{3}+12\delta-(4-3\delta^2)\sqrt{3}\,\alpha''^{2m-3}}{4+3\delta^2+4\delta\sqrt{3}}$$
$$+\frac{1}{4}\left[\frac{(4-3\delta^2)\,\alpha''^{2m-3}}{4+3\delta^2+4\delta\sqrt{3}}\right]^2.$$

Or, on reconnaît les identités

$$(2+\delta\sqrt{3})^2=4+3\delta^2+4\delta\sqrt{3},$$
$$\sqrt{3}\,(2+\delta\sqrt{3})^2=(4+3\delta^2)\sqrt{3}+12\delta,$$
$$(2+\delta\sqrt{3})\,(2-\delta\sqrt{3})=4-3\delta^2,$$

en vertu desquelles on peut écrire la précédente formule de cette autre manière :

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{2x}{c}&=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\delta\sqrt{3}}{2+\delta\sqrt{3}}\,\alpha''^{2m-3}\\&\pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{2-\delta\sqrt{3}}{2+\delta\sqrt{3}}\,\alpha''^{2m-3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2-\delta\sqrt{3}}{2+\delta\sqrt{3}}\right)^2\alpha''^{4m-6}}.\end{aligned}\right.$$

La quantité α''^{2m-3} étant rapidement décroissante avec m et se trouvant affectée du facteur $\frac{2-\delta\sqrt{3}}{2+\delta\sqrt{3}}$ toujours <1 et même assez voisin de 0 dans les cas ordinaires, on voit que $\frac{2x}{c}$ converge, rapidement aussi, vers les limites

$$\frac{2x}{c}=1\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},$$

qui répondent à $m=\infty$. Tout calcul fait, ces limites sont respectivement

$$\frac{x'}{c}=0,120082157\ldots,\qquad\frac{x''}{c}=0,879917842\ldots.$$

Si l'on emploie les formules (10), il faut y supposer

$$\lambda=0,\quad\mu=0,$$

13.

respectivement pour

$$m = \infty, \quad n - m = \infty.$$

47. *Cas particulier* $\delta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547\ldots$ — Nous devons enfin mentionner le cas où δ aurait la valeur $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $1,1547\ldots$, qui semble être, pour la surcharge, l'analogue de ce que

$$\delta = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2247\ldots$$

était pour la charge permanente (nº 40). On voit alors par les formules (18) et (19) du nº 33 que tous les nombres β sont constants et égaux à leur limite $2 - \sqrt{3} = -\frac{1}{\alpha'} = -\alpha''$, sauf les exceptions $\beta_0 = 0$ et $\beta_{n-1} = \frac{1}{2 + \delta\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$. On en déduit sans peine les résultats que voici :

Dans la travée de rive A_0A_1,

$$x' = x'' = x''' = 0, \quad x^{\text{iv}} = \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)b = \frac{7}{8}b;$$

Dans une travée intermédiaire quelconque,

$$x'' = c - x''' = \frac{-\alpha'' c}{1 - \alpha''} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)c,$$

$$x' = c - x^{\text{iv}} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)c;$$

c'est-à-dire que les valeurs de x', x'', x''', x^{iv} sont identiques à ce qu'elles seraient dans les travées centrales d'une poutre ayant un nombre infini de travées.

48. *Tableaux numériques pour le calcul des abscisses* x', x'', x''', x^{iv}. — Les abscisses x'', x''' sont, comme on l'a déjà dit plusieurs fois, nulles dans la première travée; dans toutes les travées intermédiaires on les calculera facilement par les formules (1), à l'aide du tableau VIII placé à la fin du chapitre

deuxième, où l'on trouvera les valeurs de $\frac{\beta_{m-1}}{1+\beta_{m-1}}$, $\frac{\beta_{n-m}}{1+\beta_{n-m}}$. Ce tableau s'arrête quand l'indice $m-1$ ou $n-m$, représenté par la lettre k, atteint le nombre 7; mais pour toutes les valeurs supérieures on n'aurait qu'à répéter dans toutes les colonnes le nombre 0,21132, qui représente à moins de 0,000005 près la limite du rapport $\frac{\beta_k}{1+\beta_k}$ pour $k=\infty$.

Le tableau IX (à la suite de celui qu'on vient de mentionner) fait connaître immédiatement les rapports entre x' et x^{IV}, d'une part, et la longueur de la travée correspondante, d'autre part. Sa disposition, comme celle du tableau VI (n° 43), suppose qu'on s'occupera seulement des travées dont le rang ne dépasse pas $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$, les autres devant fournir des résultats tout à fait symétriques.

Pour montrer l'usage des tableaux VIII et IX, nous allons continuer les exemples du n° 43, relatifs à une poutre ayant six travées de 50 mètres et 62^{m},50; ainsi

$$n=6,\quad b=50 \text{ mètres},\quad c=62^{\text{m}},50,\quad \delta=\frac{62,50}{50}=1,25.$$

On trouve :

Dans la première travée,

$$x'=x''=x'''=0,\quad x^{\text{IV}}=0,87995.50^{\text{m}}=43^{\text{m}},998;$$

Dans la deuxième travée,

$$x''=\frac{\beta_1 c}{1+\beta_1}=0,21739.62^{\text{m}},50=13^{\text{m}},587,$$
$$x'''=\left(1-\frac{\beta_4}{1+\beta_4}\right)c=(1-0,21133).62^{\text{m}},50=49^{\text{m}},292,$$
$$x'=0,12475.62^{\text{m}},50=7^{\text{m}},797,$$
$$x^{\text{IV}}=0,88056.62^{\text{m}},50=55^{\text{m}},035;$$

Dans la troisième travée,

$$x''=\frac{\beta_2 c}{1+\beta_2}=0,21176.62^{\text{m}},50=13^{\text{m}},235,$$
$$x'''=\left(1-\frac{\beta_3}{1+\beta_3}\right)c=(1-0,21136).62^{\text{m}},50=49^{\text{m}},290,$$

$$x' = 0,12041 . 62^m,50 = 7^m,526,$$
$$x^{IV} = 0,87998 . 62^m,50 = 54^m,996.$$

Ces calculs sont tellement simples, qu'il serait superflu de les expliquer avec plus de détails: nous passons donc à un autre sujet.

§ IV. — Effet spécial de la surcharge (suite). — Moments de flexion produits sur les points d'appui par diverses combinaisons de surcharges.

49. *Moments de flexion sur les points d'appui quand toutes les travées sont surchargées de deux en deux.* — Nous avons démontré (nos 26 et 27) que les limites positive et négative du moment de flexion en chaque point d'une travée répondent à certaines combinaisons de surcharges dans lesquelles toutes les travées sont surchargées de deux en deux, soit sans interruption d'un bout à l'autre de la poutre, soit en laissant, à un endroit déterminé, un vide ou un plein de deux travées consécutives, après quoi recommence la surcharge de deux en deux travées. Pour obtenir les moments fléchissants dus à ces diverses combinaisons, nous devons, comme toujours, commencer par la recherche de ceux qui ont lieu dans les sections prises au-dessus des points d'appui. C'est ce que nous allons faire maintenant, en suivant une méthode pareille à celle qui a déjà été employée plus haut (§ II) à l'occasion de la charge permanente. Il ne se présentera pas plus de difficultés : seulement nous aurons à distinguer dans chaque problème un assez grand nombre de cas particuliers, et à cet égard nous sommes obligé de solliciter d'avance la patience et l'attention du lecteur.

Nous commencerons par la combinaison la plus simple, celle où les travées sont surchargées de deux en deux sans interruption. Quatre cas peuvent se présenter : la poutre aura un nombre n de travées pair ou impair, et les travées portant la surcharge seront de rang pair ou de rang impair.

Premier cas : *n pair; la surcharge porte sur les travées paires.* — La surcharge ayant un poids p' par mètre courant, et les longueurs des travées étant désignées comme précédemment, celles de rive par b, les autres par c ou $b\delta$, si l'on

applique l'équation (10) du n° 6 à tous les groupes de deux travées adjacentes, on trouvera le système d'équations ci-après, entre les moments demandés X_1, X_2, $X_3, \ldots$, X_{n-2}, X_{n-1}:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} 2X_1(1+\delta)+X_2\delta &= \frac{1}{4}p'b^2\delta^3,\\ X_1+4X_2+X_3 &= \frac{1}{4}p'b^2\delta^2,\\ X_2+4X_3+X_4 &= \frac{1}{4}p'b^2\delta^2,\\ X_3+4X_4+X_5 &= \frac{1}{4}p'b^2\delta^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ X_{n-3}+4X_{n-2}+X_{n-1} &= \frac{1}{4}p'b^2\delta^2,\\ X_{n-2}\delta+2X_{n-1}(1+\delta) &= \frac{1}{4}p'b^2. \end{aligned}\right.$$

Les $n-3$ équations intermédiaires rentrant toutes dans la forme

$$X_m+4X_{m+1}+X_{m+2}=\frac{1}{4}p'b^2\delta^2,$$

il est visible, en répétant le calcul du n° 35, qu'on peut y satisfaire par l'expression

$$(16)\qquad X_m=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2+A\alpha'^m+B\alpha''^m,$$

dans laquelle α', α'' désignent les nombres que nous connaissons, et A, B deux constantes arbitraires que nous allons déterminer de manière à satisfaire aux deux équations extrêmes du groupe. Nous aurons à remplir pour cela les conditions

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}p'b^2\delta^3 = 2(1+\delta)&\left(\frac{1}{24}p'b^2\delta^2+A\alpha'+B\alpha''\right)\\ &+\delta\left(\frac{1}{24}p'b^2\delta^2+A\alpha'^2+B\alpha''^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}p'b^2 = \delta&\left(\frac{1}{24}p'b^2\delta^2+A\alpha'^{n-2}+B\alpha''^{n-2}\right)\\ &+2(1+\delta)\left(\frac{1}{24}p'b^2\delta^2+A\alpha'^{n-1}+B\alpha''^{n-1}\right), \end{aligned}$$

qui, étant ordonnées, deviennent successivement

$$\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2)=A\alpha'(2+2\delta+\delta\alpha')+B\alpha''(2+2\delta+\delta\alpha''),$$

$$\frac{1}{24}p'b^2(6-2\delta^2-3\delta^3)=A\alpha'^{n-1}\left(2+2\delta+\frac{\delta}{\alpha'}\right)+B\alpha''^{n-1}\left(2+2\delta+\frac{\delta}{\alpha''}\right),$$

$$\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2)=A\alpha'(2-\delta\sqrt{3})+B\alpha''(2+\delta\sqrt{3}),$$

$$\frac{1}{24}p'b^2(6-2\delta^2-3\delta^3)=A\alpha'^{n-1}(2+\delta\sqrt{3})+B\alpha''^{n-1}(2-\delta\sqrt{3}).$$

Or, ce sont là (sauf la forme particulière des premiers membres) des équations que nous avons déjà rencontrées et résolues (n° 35). Dans la formule (6) du n° 35, nous devrons substituer

$$S=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2)+\frac{1}{24}p'b^2(6-2\delta^2-3\delta^3)$$
$$=\frac{1}{12}p'b^2(3-2\delta^2),$$

$$T=\frac{1}{24}p'b^2(6-2\delta^2-3\delta^3)-\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2)$$
$$=\frac{1}{4}p'b^2(1-\delta^4),$$

ce qui donne

$$A\alpha'^m+B\alpha''^m=\frac{1}{24}p'b^2\left(\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}+\frac{3N_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{\delta^3-1}{2+h\delta}\right).$$

Cette valeur étant mise dans l'expression (16) de X_m, celle-ci prend la forme (*)

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}&X_m^{2.4.6...n}\\&=\frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}+\frac{3N_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{\delta^3-1}{2+h\delta}\right).\end{aligned}\right.$$

(*) Nous rétablissons ici l'indice supérieur de X_m, pour rappeler, conformément à la convention faite dans l'exemple du n° 29, la surcharge qui produit les moments dont on s'occupe.

On remarquera qu'il n'est plus possible ici, comme dans le cas de la charge permanente, de rendre égaux tous les moments X_m par un choix convenable de δ : il faudrait, en effet, pour produire ce résultat, annuler à la fois les multiplicateurs de M_{q+1-m} et de N_{q+1-m}, c'est-à-dire satisfaire simultanément aux équations

$$3-2\delta^2=0, \quad \delta^3-1=0,$$

ce qui ne peut avoir lieu.

Si n et $q+1-m$ deviennent infinis, il faut faire

$$h=\sqrt{3}, \quad N_q=\frac{1}{2\sqrt{3}}\alpha'^q,$$

$$M_{q+1-m}=\frac{1}{2}\alpha'^{q+1-m}, \quad N_{q+1-m}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\alpha'^{q+1-m};$$

la formule (17) devient alors

$$X_m^{2.4.6.8\ldots}=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left[1+\frac{\alpha''^{m-1}(3\delta-2)}{2+\delta\sqrt{3}}\right].$$

Dans ce cas particulier d'un nombre infini de travées, tous les moments X_m seraient rendus égaux en prenant

$$\delta=\frac{2}{3}.$$

Deuxième cas : *n pair; la surcharge porte sur les travées impaires.* — Ce cas est complémentaire (n° 24) du précédent; la question peut donc se résoudre sans nouveaux calculs. En effet, si la poutre est complétement surchargée, la formule (7) du n° 35 donne

$$X_m^{1.2.3.4\ldots n}=\frac{1}{12}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}\right),$$

et d'ailleurs on sait, par le théorème sur la superposition des effets (n° 5), que

$$X_m^{2.4.6\ldots n}+X_m^{1.3.5\ldots(n-1)}=X_m^{1.2.3.4\ldots n};$$

ajoutant ces deux équations avec la formule (17) prise en signe

contraire, on trouve

$$(18)\left\{\begin{aligned}&X_m^{1.3.5\ldots(n-1)}\\&=\frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}-\frac{3N_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{\delta^3-1}{2+h\delta}\right).\end{aligned}\right.$$

Traitée comme la formule (17), dans l'hypothèse de n et $q+1-m$ infinis, la formule ci-dessus se change en la suivante :

$$X_m^{1.3.5\ldots}=\frac{1}{24}p'b^2\left[\delta^2+\frac{(6-2\delta^2-3\delta^3)\alpha''^{m-1}}{2+\delta\sqrt{3}}\right].$$

Cette formule et son analogue du premier cas donnent pour limite des moments X_m, quand m augmente indéfiniment, la quantité $\frac{1}{24}p'b^2\delta^2$, soit la moitié de ce qui répond à la charge complète.

Pour rendre égaux tous les moments $X_m^{1.3.5\ldots}$, n étant infini, il faudrait poser l'équation

$$3\delta^3+2\delta^2-6=0,$$

d'où l'on déduit par tâtonnement

$$\delta=1,07240.$$

L'hypothèse $\delta=1$ fait coïncider les formules (17) et (18) : donc, *quand une poutre ayant un nombre pair de travées, toutes égales entre elles, est surchargée sur les travées de rang pair, les moments de flexion aux points d'appui sont les mêmes que si la surcharge passait sur les travées impaires, et conséquemment moitié de ceux que produirait la surcharge de la poutre entière.*

Troisième cas : *n impair; la surcharge porte sur les travées paires.* — Dans ce cas, il y a une surcharge sur la $(n-1)^{\text{ième}}$ travée, et il n'y en a pas sur la dernière : les équations (15) du premier cas sont donc modifiées, en ce que la dernière du groupe a pour second membre $\frac{1}{4}p'b^2\delta^3$, comme la première. Si donc on représente encore X_m par la formule (16), les équa-

tions de condition pour déterminer les constantes A et B seront

$$A\alpha'(2-\delta\sqrt{3})+B\alpha''(2+\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2),$$

$$A\alpha'^{n-1}(2+\delta\sqrt{3})+B\alpha''^{n-1}(2-\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2).$$

La somme des deux seconds membres deviendra

$$S=\frac{1}{12}p'b^2\delta^2(3\delta-2)$$

et leur différence T sera nulle : donc on aura, en appliquant, comme dans le premier cas, la formule (6) du n° 35,

$$(19)\qquad X_m^{2.4.6\ldots(n-1)}=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left(1+\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{3\delta-2}{3\delta+2h}\right).$$

Ici l'on peut, quel que soit n, rendre tous les moments égaux en prenant $\delta=\frac{2}{3}\cdot$ Si n est infini, $\frac{M_{q+1-m}}{N_q}$ se remplace, comme on l'a déjà vu, par $\sqrt{3}\,\alpha''^{m-1}$, et h par $\sqrt{3}$: il vient alors

$$X_m^{2.4.6\ldots}=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left[1+\frac{\alpha''^{m-1}(3\delta-2)}{2+\delta\sqrt{3}}\right],$$

formule identique avec celle trouvée dans le cas de n pair. Cela ne doit pas surprendre, car la parité de n est évidemment indifférente quand ce nombre est infini.

Quatrième cas : *n impair; la surcharge porte sur les travées impaires.* — Ce cas étant complémentaire du précédent, on peut le traiter par le même moyen que le second, et l'on trouvera

$$(20)\qquad X_m^{1.3.5\ldots n}=\frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{6-2\delta^2-3\delta^3}{3\delta+2h}\right).$$

Dans ce cas, on rendrait les X_m tous égaux par la valeur de δ

$$\delta=1,07240\ldots,$$

qui satisfait à l'équation $6-2\delta^2-3\delta^3=0$, déjà rencontrée il

y a un instant. Pour $n = \infty$, on retrouverait identiquement le résultat du deuxième cas.

50. *Moments produits aux points d'appui par une surcharge dans laquelle deux travées consécutives sont surchargées, le surplus de la poutre l'étant de deux en deux travées.* — Les surcharges ainsi définies sont celles qui donnent la limite positive X′ des moments de flexion aux environs de chaque point d'appui (n° 26); car on sait que pour avoir cette limite il faut surcharger les deux travées adjacentes à l'appui, et toutes les autres de deux en deux.

La question que nous avons maintenant à traiter présente, avec celle du n° 49, une différence assez essentielle, quant au résultat qu'il s'agit d'obtenir. La surcharge de deux en deux travées sur la poutre entière est toujours celle qu'il faut supposer pour avoir les moments limites X′ ou X″ vers le milieu des travées, et en conséquence nous devions, au n° 49, chercher tous les moments X_m, l'indice m restant quelconque; au contraire, la surcharge actuellement en question ne doit être considérée qu'aux environs d'un appui, c'est-à-dire dans les travées de rang m et $m+1$, si cet appui est A_m. Or, pour connaître les moments en un point quelconque des travées $A_{m-1}A_m$, A_mA_{m+1}, nous n'avons pas besoin des moments au-dessus de tous les appuis indistinctement : il nous suffit, suivant la formule fondamentale du n° 1, d'avoir X_{m-1}, X_m, X_{m+1}. Le problème se pose donc ainsi : ayant surchargé deux travées consécutives $A_{m-1}A_m$, A_mA_{m+1}, et toutes les autres de deux en deux (comme l'indique la dernière ligne de la *fig.* 7, p. 96), on demande les moments de flexion sur les trois appuis qui limitent les deux travées portant la surcharge non interrompue.

Les nombres m et n pouvant être chacun pair ou impair, il se présente dès le premier abord quatre cas à distinguer, dont chacun exigera généralement trois formules, et parfois des formules spéciales quand m sera égal à 1 (ou à $n-1$).

Premier cas : *n et m pairs.* — Les travées extrêmes sont toutes deux vides, de sorte que les travées surchargées ont les numéros suivants :

$$2, 4, 6, 8, \ldots, m, m+1, m+3, m+5, \ldots, n-1.$$

L'équation (10) du n° 6 appliquée à tous les groupes de deux travées adjacentes conduit donc au système ci-dessous, que nous divisons en trois groupes :

$$(21)\quad \begin{cases} 2X_1(1+\delta)+X_2\delta=\frac{1}{4}p'b^2\delta^3, \\ X_1+4X_2+X_3=\frac{1}{4}p'b^2\delta^2, \\ X_2+4X_3+X_4=\frac{1}{4}p'b^2\delta^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_{m-2}+4X_{m-1}+X_m=\frac{1}{4}p'b^2\delta^2; \end{cases}$$

$$(22)\quad X_{m-1}+4X_m+X_{m+1}=\frac{1}{2}p'b^2\delta^2;$$

$$(23)\quad \begin{cases} X_m+4X_{m+1}+X_{m+2}=\frac{1}{4}p'b^2\delta^2, \\ X_{m+1}+4X_{m+2}+X_{m+3}=\frac{1}{4}p'b^2\delta^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_{n-3}+4X_{n-2}+X_{n-1}=\frac{1}{4}p'b^2\delta^2, \\ X_{n-2}\delta+2X_{n-1}(1+\delta)=\frac{1}{4}p'b^2\delta^3. \end{cases}$$

Si nous nommons k un indice variable de 1 à m inclusivement, les équations du groupe (21), sauf la première, seront satisfaites en posant

$$(24)\quad X_k=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2+A\alpha'^k+B\alpha''^k,$$

comme dans le problème précédent; de même on satisfait à toutes les équations (23), à part la dernière, en prenant, pour un indice k variable de m à $n-1$,

$$(25)\quad X_k=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2+A'\alpha'^k+B'\alpha''^k:$$

de cette manière, toutes les inconnues X_k, en nombre indé-

terminé, sont réduites à quatre, A, B, A′, B′, qu'il s'agit d'abord de trouver : nous attribuerons ensuite à k les valeurs particulières $m-1$, m et $m+1$, pour avoir nos formules définitives.

Afin d'établir les conditions qui doivent donner A, B, A′, B′, on écrira premièrement que les expressions (24) et (25) deviennent identiques pour $k=m$, puisque m est compris dans les deux séries d'indices : on trouve ainsi

$$(A-A')\alpha'^m+(B-B')\alpha''^m=0.$$

Puis on substituera les mêmes expressions dans l'équation (22) et dans les deux équations extrêmes du système (21, 22, 23); on aura de cette manière :

$$(A-A')\alpha'^{m-1}+(B-B')\alpha''^{m-1}=\frac{1}{4}p'b^2\delta^2,$$

$$A\alpha'(2-\delta\sqrt{3})+B\alpha''(2+\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2),$$

$$A'\alpha'^{n-1}(2+\delta\sqrt{3})+B'\alpha''^{n-1}(2-\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2),$$

ce qui complète le nombre de relations nécessaires. Les deux premières donnent $A-A'$ et $B-B'$; par une élimination bien facile on obtient

$$(A-A')(\alpha'^2-1)\alpha'^{m-1}=-\frac{1}{4}p'b^2\delta^2;$$

et attendu que

$$\alpha'^2-1=(2+\sqrt{3})^2-1=6+4\sqrt{3}=2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=-2\alpha'\sqrt{3},$$

il vient

$$A-A'=\frac{1}{8\sqrt{3}}p'b^2\delta^2\alpha''^m;$$

de même on trouve

$$B-B'=-\frac{1}{8\sqrt{3}}p'b^2\delta^2\alpha'^m.$$

Éliminant A′ et B′, il reste les deux équations en A et B :

$$A\alpha'(2-\delta\sqrt{3})+B\alpha''(2+\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2),$$

$$A\alpha'^{n-1}(2+\delta\sqrt{3})+B\alpha''^{n-1}(2-\delta\sqrt{3})$$
$$=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2)$$
$$+\frac{1}{8\sqrt{3}}p'b^2\delta^2\left[(2+\delta\sqrt{3})\alpha'^{n-m-1}-(2-\delta\sqrt{3})\alpha''^{n-m-1}\right]$$
$$=\frac{1}{24}p'b'\delta^2(3\delta-2)+\frac{1}{4}p'b^2\delta^3u_{n-m}\ (*).$$

Ces équations sont encore de même forme que celles qui ont servi à déterminer A et B dans les cas précédents : il n'y a de changé que les seconds membres, dont la somme et la différence sont

$$S=\frac{1}{12}p'b^2\delta^2(3\delta-2)+\frac{1}{4}p'b^2\delta^3u_{n-m},$$
$$T=\frac{1}{4}p'b^2\delta^3u_{n-m}.$$

La formule (6) du n° 35 nous donne donc $A\alpha'^k+B\alpha''^k$, savoir :

$$A\alpha'^k+B\alpha''^k$$
$$=\frac{1}{24N_q}p'b^2\delta^2\left(M_{q+1-k}\frac{3\delta-2+3\delta u_{n-m}}{3\delta+2h}-N_{q+1-k}\frac{3\delta u_{n-m}}{2+h\delta}\right);$$

par la substitution de cette valeur dans l'équation (24), il vient

$$X_k=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left(1+\frac{M_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{3\delta-2+3\delta u_{n-m}}{3\delta+2h}\right.$$
$$\left.-\frac{N_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{3\delta u_{n-m}}{2+h\delta}\right),$$

soit, en réunissant les termes qui contiennent le facteur u_{n-m}, et remettant $\frac{M_q}{N_q}$ au lieu de h,

$$X_k=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left(1+\frac{M_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{3\delta-2}{3\delta+2h}\right)$$
$$+\frac{1}{8}p'b^2\delta^3u_{n-m}\left(\frac{M_{q+1-k}}{3N_q\delta+2M_q}-\frac{N_{q+1-k}}{2N_q+M_q\delta}\right).$$

(*) Le nombre u_{n-m} s'introduit ici par l'emploi de la formule (3) du n° 31.

La dernière parenthèse peut recevoir une forme plus simple : on a en effet

$$\frac{M_{q+1-k}}{3N_q\delta+2M_q}-\frac{N_{q+1-k}}{2N_q+M_q\delta}$$
$$=\frac{2(N_qM_{q+1-k}-M_qN_{q+1-k})+\delta(M_qM_{q+1-k}-3N_qN_{q+1-k})}{(3N_q\delta+2M_q)(2N_q+M_q\delta)}$$

ou, suivant les formules (11) du n° 32, (15) et (17) du n° 33,

$$\frac{M_{q+1-k}}{3N_q\delta+2M_q}-\frac{N_{q+1-k}}{2N_q+M_q\delta}=\frac{2N_{k-1}+\delta M_{k-1}}{-\frac{1}{2}u_n\delta}=-2\frac{u_k}{u_n}.$$

Substituant ce résultat dans X_k, on trouve définitivement

$$X_k=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left(1+\frac{M_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{3\delta-2}{3\delta+2h}\right)-\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_ku_{n-m}}{u_n}.$$

Cette équation s'applique à toutes les valeurs de k qui ne dépassent pas m; nous pouvons donc y faire $k=m-1$, $k=m$, et en tirer deux de nos inconnues principales, savoir :

$$(26)\quad\left\{\begin{array}{l}X_{m-1}^{2.4.6\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots(n-1)}\\ =\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left(1+\frac{M_{q+2-m}}{N_q}\cdot\frac{3\delta-2}{3\delta+2h}\right)-\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_{m-1}u_{n-m}}{u_n},\end{array}\right.$$

$$(27)\quad\left\{\begin{array}{l}X_{m}^{2.4.6\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots(n-1)}\\ =\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left(1+\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{3\delta-2}{3\delta+2h}\right)-\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_mu_{n-m}}{u_n}.\end{array}\right.$$

Il n'est pas d'ailleurs nécessaire, pour avoir X_{m+1}, de poursuivre le calcul commencé et de rechercher les constantes A′, B′ : il suffit d'appliquer la formule (26), en imaginant que le numérotage des appuis commence au second bout A_n de la pièce, ce qui revient à changer, dans le second membre, m en $n-m$ ou en $2q+2-m$. Remarquant en outre qu'on a généralement (n° 32)

$$M_k=M_{-k},$$

on trouve par ce procédé la troisième inconnue principale

$$(28)\left\{\begin{aligned}&X_{m+1}^{2.4.6\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots(n-1)}\\&=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left(1+\frac{M_{q-m}}{N_q}\cdot\frac{3\delta-2}{3\delta+2h}\right)-\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_m u_{n-m-1}}{u_n}.\end{aligned}\right.$$

Les trois dernières formules présentent un inconvénient que n'avaient pas les précédentes, données à partir du § II : c'est qu'on y fait intervenir la série des nombres u, qui dépend de δ, et ne peut, comme celles des nombres M, N, h, se calculer une fois pour toutes. Cet inconvénient disparaîtrait si l'on remplaçait les u par leurs valeurs (15) et (16) ou (17) du n° 33; mais on tomberait alors dans une assez grande complication d'écriture, et le bénéfice ne serait pas bien réel. Nous n'avons pu d'ailleurs, malgré nos efforts, trouver de transformation propre à donner des formules suffisamment concises, tout en conservant l'avantage de n'y faire entrer δ qu'explicitement.

On remarquera que la première partie de ces formules est identique avec la formule (19), relative à une autre distribution de la surcharge.

Pour savoir ce que deviennent les moments X_{m-1}, X_m, X_{m+1}, qu'on vient de calculer, dans le cas de $n=\infty$, m restant fini, il suffit d'avoir la limite des rapports $\frac{u_{n-m}}{u_n}$, $\frac{u_{n-m-1}}{u_n}$. Or les formules (3) et (4) du n° 31 donnent, en négligeant les puissances infinies de α'',

$$\lim\frac{u_{n-m}}{u_n}=-\frac{(2+\delta\sqrt{3})\,\alpha'^{\,n-m-1}}{(2+\delta\sqrt{3})^2\alpha'^{\,n-2}}=-\frac{1}{2+\delta\sqrt{3}}\alpha''^{\,m-1},$$

$$\lim\frac{u_{n-m-1}}{u_n}=-\frac{1}{2+\delta\sqrt{3}}\alpha''^{\,m};$$

combinant ce résultat avec celui précédemment obtenu pour la formule (19), nous trouverons, dans le cas de $n=\infty$,

$$\begin{aligned}&X_{m-1}^{2.4.6\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots}\\&=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2\left[1+\frac{\alpha''^{\,m-2}(3\delta-2)}{2+\delta\sqrt{3}}\right]+\frac{1}{4}p'b^2\delta^2u_{m-1}\frac{\alpha''^{\,m-1}}{2+\delta\sqrt{3}},\end{aligned}$$

$$\mathrm{X}_{m}^{2.4.6\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots}$$
$$= \frac{1}{24} p' b^2 \delta^2 \left[1 + \frac{\alpha''^{m-1}(3\delta - 2)}{2 + \delta\sqrt{3}} \right] + \frac{1}{4} p' b^2 \delta^3 u_m \frac{\alpha''^{m-1}}{2 + \delta\sqrt{3}},$$

$$\mathrm{X}_{m+1}^{2.4.6\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots}$$
$$= \frac{1}{24} p' b^2 \delta^2 \left[1 + \frac{\alpha''^{m}(3\delta - 2)}{2 + \delta\sqrt{3}} \right] + \frac{1}{4} p' b^2 \delta^2 u_m \frac{\alpha''^{m}}{2 + \delta\sqrt{3}}.$$

Lorsque m augmente lui-même indéfiniment, ces trois résultats convergent vers des limites qu'il est facile d'obtenir : on remarquera que, d'après la formule (3) du n° 31, l'on a

$$u_{m-1}\alpha''^{m-1} = \frac{1}{2\delta\sqrt{3}} \left[(2 + \delta\sqrt{3})\alpha'' - (2 - \delta\sqrt{3})\alpha''^{2m-3} \right],$$

et par conséquent, pour $m = \infty$,

$$\lim u_{m-1}\alpha''^{m-1} = \frac{2 + \delta\sqrt{3}}{2\delta\sqrt{3}} \alpha'';$$

de même on trouverait

$$\lim u_m \alpha''^{m} = \frac{2 + \delta\sqrt{3}}{2\delta\sqrt{3}} \alpha'',$$

$$\lim u_m \alpha''^{m-1} = \frac{1}{\alpha''} \lim u_m \alpha''^{m} = \frac{2 + \delta\sqrt{3}}{2\delta\sqrt{3}}:$$

on en conclut sans peine

$$\lim \mathrm{X}_{m-1}^{2.4.6\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots} = \frac{1}{24} p' b^2 \delta^2 + \frac{1}{8\sqrt{3}} p' b^2 \delta^2 \alpha''$$
$$= \frac{1}{24} p' b^2 \delta^2 (1 + \alpha''\sqrt{3}) = \frac{1}{12} p' b^2 \delta^2 (2 - \sqrt{3}),$$

$$\lim \mathrm{X}_{m}^{2.4.6\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots} = \frac{1}{24} p' b^2 \delta^2 + \frac{1}{8\sqrt{3}} p' b^2 \delta^2$$
$$= \frac{1}{24} p' b^2 \delta^2 (1 + \sqrt{3}),$$

$$\lim \mathrm{X}_{m+1}^{2.4.6\ldots m(m+1)(m+5)(m+5)\ldots} = \frac{1}{12} p' b^2 \delta^2 (2 - \sqrt{3}).$$

Les coefficients $\frac{1}{12}(2-\sqrt{3})$, $\frac{1}{24}(1+\sqrt{3})$ ont respectivement pour valeur, en fractions décimales,

$$0,022329\ldots \quad \text{et} \quad 0,113835\ldots.$$

Deuxième cas : *n pair, m impair.* — Les deux travées extrêmes sont alors chargées, et l'ensemble des équations (21), (22) et (23) éprouve un changement qui consiste en ce que le second membre de la première et de la dernière devient $\frac{1}{4}p'b^2$ au lieu de $\frac{1}{4}p'b^2\delta^3$. Les valeurs de $A-A'$ et $B-B'$, déterminées par des conditions identiques, restent cependant les mêmes que dans le premier cas; mais, dans les deux équations qui, après l'élimination de A' et B', doivent donner A et B, la quantité $\delta^2(3\delta-2)$ se trouve remplacée par $6-2\delta^2-3\delta^3$. Il suffit donc de remplacer la première par la seconde dans les formules finales du premier cas, ce qui donne :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & X_{m-1}^{1.3.5\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots n} \\ & = \frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{6-2\delta^2-3\delta^3}{3\delta+2h}\right) \\ & \quad -\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_{m-1}u_{n-m}}{u_n}, \end{aligned}\right.$$

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} & X_{m}^{1.3.5\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots n} \\ & = \frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{6-2\delta^2-3\delta^3}{3\delta+2h}\right) \\ & \quad -\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_{m}u_{n-m}}{u_n}, \end{aligned}\right.$$

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} & X_{m+1}^{1.3.5\ldots m(m+1)(m+3)(m+5)\ldots n} \\ & = \frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q-m}}{N_q}\cdot\frac{6-2\delta^2-3\delta^3}{3\delta+2h}\right) \\ & \quad -\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_{m}u_{n-m-1}}{u_n}; \end{aligned}\right.$$

et quand n tend vers l'infini, m restant fini,

$$X_{m-1}^{1.3.5\ldots m\,(m+1)\,(m+3)\,(m+5)\ldots}$$
$$=\frac{1}{24}p'b^2\left[\delta^2+\frac{\alpha''^{m-1}(6-2\delta^2-3\delta^3)}{2+\delta\sqrt{3}}\right]+\frac{1}{4}p'b^2\delta^3u_{m-1}\frac{\alpha''^{m-1}}{2+\delta\sqrt{3}},$$

$$X_{m}^{1.3.5\ldots m\,(m+1)\,(m+3)\,(m+5)\ldots}$$
$$=\frac{1}{24}p'b^2\left[\delta^2+\frac{\alpha''^{m-1}(6-2\delta^2-3\delta^3)}{2+\delta\sqrt{3}}\right]+\frac{1}{4}p'b^2\delta^3u_{m}\frac{\alpha''^{m-1}}{2+\delta\sqrt{3}},$$

$$X_{m+1}^{1.3.5\ldots m\,(m+1)\,(m+3)\,(m+5)\ldots}$$
$$=\frac{1}{24}p'b^2\left[\delta^2+\frac{\alpha''^{m}(6-2\delta^2-3\delta^3)}{2+\delta\sqrt{3}}\right]+\frac{1}{4}p'b^2\delta^3u_{m}\frac{\alpha''^{m}}{2+\delta\sqrt{3}};$$

ces dernières formules ont les mêmes limites que leurs analogues du premier cas, lorsque m tend lui-même vers ∞.

On remarque, dans les formules (29), (30), (31), que la première partie reproduit identiquement la formule (20).

Cas particulier : $m=1$. — Il est à remarquer que la valeur $m=1$ ne saurait être introduite dans les formules (29), (30) et (31). En effet, si m a cette valeur, le système des équations (21) et (22) doit se remplacer par l'équation unique

$$2X_1(1+\delta)+X_2\delta=\frac{1}{4}p'b^2(1+\delta^3),$$

qu'on n'obtiendrait pas en faisant $m=1$ dans les équations qui conviennent au cas général. Il faut alors poser

$$X_k=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2+A'\alpha'^k+B'\alpha''^k,$$

et déterminer A', B' par la condition : 1° de satisfaire à l'équation précédente; 2° de satisfaire à l'équation

$$X_{n-2}\delta+2X_{n-1}(1+\delta)=\frac{1}{4}p'b^2,$$

la dernière de celles qui remplacent ici le groupe (23). Cela

conduit aux relations

$$A'\alpha'(2-\delta\sqrt{3})+B'\alpha''(2+\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2(6-2\delta^2+3\delta^3),$$

$$A'\alpha'^{n-1}(2+\delta\sqrt{3})+B'\alpha''^{n-1}(2-\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2(6-2\delta^2-3\delta^3),$$

toujours de même forme que celles qu'on a déjà rencontrées plusieurs fois. La somme et la différence des seconds membres étant respectivement

$$S=\frac{1}{6}p'b^2(3-\delta^2),\quad T=-\frac{1}{4}p'b^2\delta^3,$$

on arrive, par les mêmes procédés de calcul, à

$$X_k=\frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{2M_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{3-\delta^2}{3\delta+2h}+\frac{3N_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{\delta^3}{2+h\delta}\right).$$

De là résultent, en faisant $k=1$, $k=2$, les formules :

$$(32)\quad\left\{\begin{aligned}X_1^{1.2.4.6\ldots n}&=\frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{2M_q}{N_q}\cdot\frac{3-\delta^2}{3\delta+2h}+\frac{3\delta^3}{2+h\delta}\right)\\&=\frac{1}{24}p'b^2\left[\delta^2+\frac{2h(3-\delta^2)}{3\delta+2h}+\frac{3\delta^3}{2+h\delta}\right]\\&=\frac{1}{8}p'b^2\left(\frac{\delta^3+2h}{3\delta+2h}+\frac{\delta^3}{h\delta+2}\right),\end{aligned}\right.$$

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}&X_2^{1.2.4.6\ldots n}\\&=\frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{2M_{q-1}}{N_q}\cdot\frac{3-\delta^2}{3\delta+2h}+\frac{3N_{q-1}}{N_q}\cdot\frac{\delta^3}{2+h\delta}\right).\end{aligned}\right.$$

Quand n grandit indéfiniment, on doit faire

$$h=\sqrt{3},\quad \frac{M_{q-1}}{N_q}=\alpha''\sqrt{3},\quad \frac{N_{q-1}}{N_q}=\alpha'' :$$

ces valeurs, mises dans les formules (32) et (33), donnent pour résultat

$$X_1^{1.2.4.6.8\ldots}=\frac{1}{8}\cdot\frac{p'b^2}{2+\delta\sqrt{3}}\left[\delta^3\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+2\right],$$

$$X_2^{1.2.4.6.8\ldots}=\frac{1}{24}p'b^2\left[\delta^2+\frac{\alpha''(6-2\delta^2+3\delta^3)}{2+\delta\sqrt{3}}\right].$$

Il est manifeste que l'hypothèse $m = n - 1$ produirait une exception tout à fait analogue à celle qu'on vient d'étudier, et qui pourrait se traiter de la même manière; mais il est inutile de s'y arrêter, car les deux moitiés de la poutre étant dans des conditions identiques, on peut se dispenser de faire $m > \frac{n}{2}$.

Troisième cas : *n impair, m pair.* — La première travée reste vide, et la dernière se trouve surchargée; par suite, le groupe (21) et l'équation (22) subsistent; mais dans la dernière des équations (23), $\frac{1}{4}p'b^2\delta^3$ doit se changer en $\frac{1}{4}p'b^2$. Les valeurs de A — A', B — B' restent ce qu'elles étaient dans le premier cas, et les équations finales en A et en B deviennent

$$A\alpha'(2 - \delta\sqrt{3}) + B\alpha''(2 + \delta\sqrt{3}) = \frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta - 2),$$

$$A\alpha'^{n-1}(2 + \delta\sqrt{3}) + B\alpha''^{n-1}(2 - \delta\sqrt{3}) = \frac{1}{24}p'b^2(6 - 2\delta^2 - 3\delta^3) + \frac{1}{4}p'b^2\delta^3 u_{n-m}.$$

La somme et la différence des seconds membres étant

$$S = \frac{1}{12}p'b^2(3 - 2\delta^2) + \frac{1}{4}p'b^2\delta^3 u_{n-m},$$

$$T = \frac{1}{4}p'b^2(1 - \delta^3) + \frac{1}{4}p'b^2\delta^3 u_{n-m},$$

on en conclut, toujours par la même méthode, qu'on a, pour un indice k non supérieur à m,

$$X_k = \frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2 + \frac{M_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{3 - 2\delta^2 + 3\delta^3 u_{n-m}}{3\delta + 2h} - \frac{3N_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{1 - \delta^3 + \delta^3 u_{n-m}}{2 + h\delta}\right),$$

ou, en groupant les termes en u_{n-m},

$$X_k = \frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2 + \frac{M_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{3 - 2\delta^2}{3\delta + 2h} + \frac{3N_{q+1-k}}{N_q}\cdot\frac{\delta^3 - 1}{2 + h\delta}\right) - \frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_k u_{n-m}}{u_n}.$$

Si l'on attribue à k les valeurs $m-1$ et m, on obtient d'abord les formules :

$$(34)\quad \begin{cases} X_{m-1}^{2.4.6\ldots m\,(m+1)\,(m+3)\,(m+5)\ldots n} \\ \quad = \dfrac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2 + \dfrac{M_{q+2-m}}{N_q}\cdot\dfrac{3-2\delta^2}{3\delta+2h} + \dfrac{3N_{q+2-m}}{N_q}\cdot\dfrac{\delta^3-1}{2+h\delta}\right) \\ \quad - \dfrac{1}{4}p'b^2\delta^3\dfrac{u_{m-1}u_{n-m}}{u_n}, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} X_{m}^{2.4.6\ldots m\,(m+1)\,(m+3)\,(m+5)\ldots n} \\ \quad = \dfrac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2 + \dfrac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\dfrac{3-2\delta^2}{3\delta+2h} + \dfrac{3N_{q+1-m}}{N_q}\cdot\dfrac{\delta^3-1}{2+h\delta}\right) \\ \quad - \dfrac{1}{4}p'b^2\delta^3\dfrac{u_m u_{n-m}}{u_n}. \end{cases}$$

Quant au moment X_{m+1}, nous en écrirons provisoirement la valeur sans démonstration, sauf à y revenir bientôt en traitant le quatrième cas; cette valeur est

$$(36)\quad \begin{cases} X_{m+1}^{2.4.6\ldots m\,(m+1)\,(m+3)\,(m+5)\ldots n} \\ \quad = \dfrac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2 + \dfrac{M_{q-m}}{N_q}\cdot\dfrac{3-2\delta^2}{3\delta+2h} + \dfrac{3N_{q-m}}{N_q}\cdot\dfrac{\delta^3-1}{2+h\delta}\right. \\ \quad - \dfrac{1}{4}p'b^2\delta^3\dfrac{u_m u_{n-m-1}}{u_n}. \end{cases}$$

Les limites relatives à $n=\infty$ pourraient se trouver par des calculs semblables à ceux du premier cas; mais il est plus simple de remarquer que la parité de n devient indifférente lorsque ce nombre est infini, de sorte que les résultats du premier cas doivent se reproduire identiquement, ce qui se vérifie en effet.

La première partie des trois formules (34), (35) et (36) s'est déjà rencontrée dans le premier cas du n° 49.

La supposition particulière $m=n-1$ exigerait une analyse spéciale, comme on en a fait une pour $m=1$ ou $m=n-1$ dans le deuxième cas; mais, ainsi qu'on l'a déjà dit plusieurs fois, il est inutile d'attribuer à m des valeurs supérieures à $\frac{n}{2}$.

QUATRIÈME CAS : *n et m impairs*. — La première travée est alors chargée et la dernière vide. On doit en conséquence modifier le système d'équations (21), (22) et (23), en remplaçant dans la première $\frac{1}{4}p'b^2\delta^3$ par $\frac{1}{4}p'b^2$. Rien n'est changé aux différences A — A', B — B', mais les équations finales en A et B deviennent

$$A\alpha'(2-\delta\sqrt{3})+B\alpha''(2+\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2(6-2\delta^2-3\delta^3),$$

$$A\alpha'^{n-1}(2+\delta\sqrt{3})+B\alpha''^{n-1}(2-\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2)$$
$$+\frac{1}{4}p'b^2\delta^3u_{n-m}.$$

La somme et la différence des seconds membres sont

$$S=\frac{1}{12}p'b^2(3-2\delta^2)+\frac{1}{4}p'b^2\delta^3u_{n-m},$$
$$T=\frac{1}{4}p'b^2(\delta^3-1)+\frac{1}{4}p'b^2\delta^3u_{n-m},$$

c'est-à-dire les mêmes que dans le cas précédent, sauf que δ^3-1 a remplacé $1-\delta^3$ dans la différence T : il suffit donc de faire le même changement dans les formules du troisième cas, et l'on obtient

$$(37)\quad\left\{\begin{aligned}&X_{m-1}^{1.3.5\ldots m\,(m+1)\,(m+3)\,(m+5)\ldots(n-1)}\\&\quad=\frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q+2-m}}{N_q}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}+\frac{3N_{q+2-m}}{N_q}\cdot\frac{1-\delta^3}{2+h\delta}\right)\\&\quad-\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_{m-1}u_{n-m}}{u_n},\end{aligned}\right.$$

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}&X_{m}^{1.3.5\ldots m\,(m+1)\,(m+3)\,(m+5)\ldots(n-1)}\\&\quad=\frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}+\frac{3N_{q+1-m}}{N_q}\cdot\frac{1-\delta^3}{2+h\delta}\right)\\&\quad-\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_m u_{n-m}}{u_n},\end{aligned}\right.$$

$$(39)\left\{\begin{aligned}&X_{m+1}^{1.3.5\ldots m\,(m+1)\,(m+3)\,(m+7)\ldots(n-1)}\\&=\frac{1}{24}p'b^2\left(\delta^2+\frac{M_{q-m}}{N_q}\cdot\frac{3-2\delta^2}{3\delta+2h}+\frac{3N_{q-m}}{N_q}\cdot\frac{1-\delta^3}{2+h\delta}\right)\\&\quad-\frac{1}{4}p'b^2\delta^3\frac{u_m u_{n-m-1}}{u_n}.\end{aligned}\right.$$

On remarque encore ici, dans la première partie de ces trois formules, la reproduction d'une formule du n° 49 (deuxième cas).

La supposition $n=\infty$ donnerait lieu aux formules déjà trouvées dans le deuxième cas du problème actuel.

Nous avons laissé tout à l'heure sans démonstration la formule (36), et par conséquent la formule (39), qui s'en déduit, est affectée du même défaut. Il est facile maintenant de le faire disparaître. En effet, quand nous supposons (troisième cas) n impair et m pair, l'appui A_m aurait un rang $m'=n-m$ impair, si le numérotage commençait à la seconde extrémité de la poutre. Or, cela nous placerait dans les circonstances du quatrième cas; donc nous pourrons calculer $X_{m'-1}$, ou, ce qui est la même chose, X_{m+1}, en mettant dans le second membre de la formule (37) $n-m$ au lieu de m. Si l'on tient compte des égalités (n° 32)

$$M_{m-q}=M_{q-m},\quad N_{m-q}=-N_{q-m},$$

on arrive bien, de cette manière, à la formule (36).

Cas particulier : $m=1$. — Il faut encore, dans le quatrième comme dans le deuxième cas, une analyse spéciale lorsqu'on a $m=1$; on la fera d'ailleurs par une méthode tout à fait analogue. En posant toujours

$$X_k=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2+A'\alpha'^k+B'\alpha''^k,$$

on aura, pour déterminer les constantes A', B',

$$A'\alpha'(2-\delta\sqrt{3})+B'\alpha''(2+\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2(6-2\delta^2+3\delta^3),$$

$$A'\alpha'^{n-1}(2+\delta\sqrt{3})+B'\alpha''^{n-1}(2-\delta\sqrt{3})=\frac{1}{24}p'b^2\delta^2(3\delta-2).$$

Les seconds membres de ces équations ont pour somme et pour différence

$$S = \frac{1}{12} p' b^2 (3 - 2\delta^2 + 3\delta^3), \quad T = -\frac{1}{4} p' b^2;$$

on trouve donc facilement, en procédant comme ci-dessus,

$$(40) \left\{ \begin{aligned} & X_1^{1.2.4.6\ldots(n-1)} \\ & = \frac{1}{24} p' b^2 \left[\delta^2 + \frac{h(3 - 2\delta^2 + 3\delta^3)}{3\delta + 2h} + \frac{3}{2 + h\delta} \right] \\ & = \frac{1}{8} p' b^2 \left[\frac{\delta^3 + h(1 + \delta^3)}{3\delta + 2h} + \frac{1}{2 + h\delta} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(41) \left\{ \begin{aligned} & X_2^{1.2.4.6\ldots(n-1)} \\ & = \frac{1}{24} p' b^2 \left(\delta^2 + \frac{M_{q-1}}{N_q} \cdot \frac{3 - 2\delta^2 + 3\delta^3}{3\delta + 2h} + \frac{3N_{q-1}}{N_q} \cdot \frac{1}{2 + h\delta} \right). \end{aligned} \right.$$

Les limites de ces formules pour $n = \infty$ doivent être les mêmes que celles des formules (32) et (33); ce que l'on vérifie sans peine.

51. ***Résultats numériques fournis par l'application des formules précédentes.*** — Nous venons de compléter l'arsenal de formules qui nous était nécessaire pour aborder le problème des courbes enveloppes des moments. Ces formules ne sont pas compliquées, et l'introduction des données numériques de chaque problème particulier y est facile; mais elles sont nombreuses, et il faut une certaine attention pour toujours bien choisir celle qu'on doit employer. Il faut pour cela prendre garde à toutes les conditions concernant la parité des nombres m et n, ainsi qu'aux exceptions relatives à $m = 1$ ou $m = n - 1$.

Au reste, quand la valeur δ sera l'une des huit pour lesquelles nous avons déjà dressé les tableaux numérotés de I à IX, et que la poutre aura de trois à douze travées inclusivement, l'emploi des tableaux X et XI dispensera de recourir aux formules du § IV qu'on vient de lire, et partant de toutes les précautions qu'elles exigent. On trouve en effet dans ces tableaux les moments de flexion produits sur les points d'appui par toutes les combinaisons de surcharge qu'il peut être utile

de considérer; c'est donc la réduction desdites formules en nombres que nous donnons toute effectuée, en ne conservant que $p' b^2$ comme facteur algébrique.

Le tableau X est consacré aux surcharges qui portent, soit sur toutes les travées de rang pair, soit sur celles de rang impair. Dans le tableau XI on a considéré les surcharges couvrant deux travées adjacentes et toutes les autres de deux en deux, et on a donné les moments de flexion correspondants sur les trois points d'appui qui appartiennent aux deux travées portant la surcharge non interrompue. Dans l'un et l'autre de ces tableaux, comme dans les précédents, on n'a fait figurer que les résultats relatifs à la première moitié de la poutre, les autres étant inutiles ou pouvant s'obtenir, si on le veut, par la considération de la symétrie.

On remarquera peut-être, dans ces deux tableaux, que certaines quantités homologues tendent un peu irrégulièrement vers leur limite, à mesure que le nombre n des travées va en augmentant. Prenons, par exemple, le moment X_1 sous la surcharge des travées de rang pair; si n varie de 3 à 12, δ restant toujours égal à 1,1, le rapport $\frac{X_1}{p' b^2}$ prend successivement les valeurs ci-après :

Nombre n des travées.	Rapports $X_1 : p' b^2$.
3	0,062783
4	0,066889
5	0,066884
6	0,067177
7	0,067177
8	0,067198
9	0,067198
10	0,067199
11	0,067199
12	0,067200

Les différences de ce rapport sont, comme on le voit, assez irrégulières : mais il faut se rappeler qu'il y a, pour le calculer, deux formules, se rapportant, l'une au cas de n pair, et l'autre au cas de n impair. Les dix nombres ci-dessus expriment les valeurs successives de deux fonctions de n, et non d'une seule. C'est ce qui explique l'irrégularité; on la ferait disparaître en séparant et considérant isolément les valeurs de chacune des deux fonctions.

L'usage des tableaux X et XI est très-simple ; il se comprend à première vue. En voici un exemple. Supposons, comme aux nos 43 et 48,

$$n = 6, \quad b = 50^{m}, \quad c = 62^{m},50, \quad \delta = \frac{c}{b} = 1,25 ;$$

soit en outre $p' = 5000$ kilogrammes. On aura :

Pour les moments fléchissants dus à la surcharge des travées paires ou des travées impaires (tableau X),

$$\begin{aligned}
X_1^{2.4.6} &= 0,092298\,p'b^2 = 1153725,\\
X_2^{2.4.6} &= 0,058350\,p'b^2 = 729375,\\
X_3^{2.4.6} &= 0,064925\,p'b^2 = 811563,\\
X_1^{1.3.5} &= 0,035395\,p'b^2 = 442438,\\
X_2^{1.3.5} &= 0,072576\,p'b^2 = 907200,\\
X_3^{1.3.5} &= 0,064925\,p'b^2 = 811563 ;
\end{aligned}$$

Pour les moments fléchissants dus à la surcharge de deux travées adjacentes, et des autres prises de deux en deux (tableau XI),

$$\begin{aligned}
X_1^{1.2.4.6} &= 0,152329\,p'b^2 = 1904025,\\
X_2^{1.2.4.6} &= 0,042267\,p'b^2 = 528338,\\
X_1^{2.3.5} &= 0,061192\,p'b^2 = 764900,\\
X_2^{2.3.5} &= 0,170333\,p'b^2 = 2129166,\\
X_3^{2.3.5} &= 0,038726\,p'b^2 = 484075,\\
X_2^{1.3.4.6} &= 0,043373\,p'b^2 = 542163,\\
X_3^{1.3.4.6} &= 0,173626\,p'b^2 = 2170625.
\end{aligned}$$

L'unité de moments dans ces calculs est le kilogramme agissant sur un bras de levier d'un mètre de longueur.

§ V. — Courbes enveloppes des moments de flexion.

52. *Recherche des moments limites* X', X'', *dus à l'action isolée de la surcharge.* — On a vu, au § IV du chapitre premier, que la solution complète du problème des moments de flexion, pour une poutre ayant des appuis en nombre quelconque et arbitrairement espacés, revient à la détermination de trois quantités X, X', X'', variables d'une section à l'autre. Quand il s'agit des poutres symétriques à travées intermédiaires égales, nous savons déjà calculer X, qui n'est autre chose que le moment fléchissant produit par la seule action de la charge per-

manente, ou encore $pF(x)$: c'est la question que nous avons traitée au § II du chapitre deuxième, et spécialement aux n°s 42 et 43. Il s'agit maintenant de faire la même chose pour X' et X''.

On sait (n° 26) que l'un et l'autre de ces moments limites est, dans toute travée intermédiaire $A_{m-1}A_m$, successivement représenté par cinq fonctions différentes de l'abscisse, que nous avons nommées

$$p'f_1(x),\quad p'f_2(x),\quad p'f_3(x),\quad p'f_4(x),\quad p'f_5(x),$$
$$p'\psi_1(x),\quad p'\psi_2(x),\quad p'\psi_3(x),\quad p'\psi_4(x),\quad p'\psi_5(x),$$

le facteur p' restant ainsi en évidence, et les abscisses x étant comptées à partir de l'origine A_{m-1} de la travée; chacune de ces fonctions s'applique dans l'un des cinq intervalles que déterminent, conjointement avec les extrémités A_{m-1} et A_m, les abscisses x', x'', x''', x^{IV} ci-dessus étudiées (n°s 44 à 48). Ainsi f_1 et ψ_1 s'appliquent entre $x=0$ et $x=x'$; f_2 et ψ_2 entre $x=x'$ et $x=x''$; f_3 et ψ_3 entre $x=x''$ et $x=x'''$, et ainsi de suite. En y joignant $F(x)$, cela fait en tout onze fonctions de x qui sont nécessaires pour définir X, X', X'' dans la travée dont il s'agit; mais nous avons vu aussi qu'après en avoir déterminé seulement quatre, savoir F, f_1, ψ_3, f_5, les sept autres s'en déduisent par trois soustractions seulement. Or, $F(x)$ nous est connu; nous n'avons donc qu'à indiquer le procédé à suivre pour le calcul de $f_1(x)$, $\psi_3(x)$, $f_5(x)$, calcul en vue duquel ont été démontrées les formules des n°s 49 et 50.

Entre $x=0$ et $x=x'$, la limite positive X' répond (n° 26) à la surcharge des travées portant les numéros

$$m,\quad m-1,\quad m-3,\quad m-5,\quad m-7,\ldots$$

jusqu'à épuisement de m, d'une part;

$$m+2,\quad m+4,\quad m+6,\quad m+8,\quad m+10,\ldots$$

jusqu'à n ou $n-1$, d'autre part; c'est-à-dire qu'il faut surcharger les deux travées adjacentes à l'appui A_{m-1} et les autres de deux en deux. Pour une telle combinaison de surcharge, les formules du n° 50 et le tableau XI font connaître X_{m-1} et X_m sous la forme

$$\mu p' b^2,\quad \mu' p' b^2,$$

μ et μ' désignant deux coefficients numériques; donc on aura, par la formule fondamentale du n° 1,

$$X' = \mu p' b^2 + (\mu' - \mu)\frac{p' b^2 x}{b\delta} - \frac{1}{2} p' x (b\delta - x),$$

et conséquemment

$$f_1(x) = \mu b^2 - \left(\frac{1}{2}\delta - \frac{\mu' - \mu}{\delta}\right) bx + \frac{1}{2} x^2.$$

De la même manière on trouvera X', et partant $f_3(x)$ entre $x = x^{\text{IV}}$ et $x = c = b\delta$; car dans cet intervalle X' répond encore à une combinaison de surcharge dans laquelle on charge deux travées consécutives et les autres de deux en deux, savoir les travées portant les numéros

$$m,\quad m+1,\quad m+3,\quad m+5,\quad m+7,\ldots$$

jusqu'à $n-1$ ou n, et

$$m-2,\quad m-4,\quad m-6,\quad m-8,\quad m-10,\ldots$$

jusqu'à épuisement de m. Par les formules du n° 50 et le tableau XI, on aura donc les valeurs de X_{m-1} et X_m sous la forme

$$\nu p' b^2,\quad \nu' p' b^2,$$

et l'on en conclura

$$f_3(x) = \nu b^2 - \left(\frac{1}{2}\delta - \frac{\nu' - \nu}{\delta}\right) bx + \frac{1}{2} x^2.$$

Enfin, on supposera la surcharge placée sur la travée $A_{m-1} A_m$ et sur toutes les autres, prises de deux en deux à partir de celle-là, combinaison à laquelle répondent X'' dans la troisième région (entre $x = x''$ et $x = x'''$), ainsi que $\psi_3(x)$; les formules du n° 49 et le tableau X donneront alors

$$X_{m-1} = \rho p' b^2,\quad X_m = \rho' p' b^2.$$

De là résulte, par ladite formule du n° 1,

$$X'' = \rho p' b^2 + (\rho' - \rho)\frac{p' b^2 x}{b\delta} - \frac{1}{2} p' x (b\delta - x),$$

et aussi

$$\psi_3(x) = \rho b^2 - \left(\frac{1}{2}\delta - \frac{\rho' - \rho}{\delta}\right) bx + \frac{1}{2}x^2.$$

Connaissant ces trois fonctions f, ψ_3, f_6, la solution s'achève aisément par les relations (3) du n° 26, qui donnent de suite f_2 et ψ_5, f_3, f_4 et ψ_1, ψ_2, ψ_4.

53. *Cas particuliers d'une travée de rive et d'une travée centrale.* 1° *Travée de rive.* — Les travées de rive se divisent en deux régions seulement (n° 27) : ainsi, dans la travée n° 1, par exemple, on ne doit considérer que les intervalles de $x = 0$ à $x = x^{\text{iv}}$, et de $x = x^{\text{iv}}$ à $x = b$. Il n'y a donc plus que cinq fonctions à trouver, savoir :

$$F(x), \quad f_3(x), \quad f_6(x), \quad \psi_3(x), \quad \psi_5(x),$$

et même $F(x)$ est déjà connue (n° 42). On sait d'ailleurs (n° 27) qu'il suffit de connaître en outre ψ_3 et f_6, pour en déduire, par deux soustractions, f_3 et ψ_5 : or, le calcul des deux fonctions ψ_3 et f_6 s'effectue en suivant une marche tout à fait analogue à celle du n° 52.

Dans le premier intervalle, de $x = 0$ à $x = x^{\text{iv}}$, la limite X'' répond à la surcharge des travées portant les numéros

1, 3, 5, 7, ..., jusqu'à $n - 1$ ou n,

pour laquelle on sait (n° 49) calculer $X_1 = \rho_1 p' b^2$, ρ_1 étant un coefficient dont la valeur numérique sera fournie par le tableau X, si n et δ sont dans les limites convenables. Donc (n° 1)

$$X'' = \rho_1 p' b^2 \frac{x}{b} - \frac{1}{2} p' x (b - x),$$

et par conséquent

$$\psi_3(x) = -\left(\frac{1}{2} - \rho_1\right) bx + \frac{1}{2}x^2.$$

Dans le surplus de la travée, entre $x = x^{\text{iv}}$ et $x = b$, il faut, pour avoir X', surcharger la première travée, plus toutes celles de rang pair. Ce sont alors les formules du n° 50 et le

tableau XI qui donnent le moment $X_1 = \nu_1 p' b^2$; il en résulte de même

$$X' = \nu_1 p' b^2 \frac{x}{b} - \frac{1}{2} p' x (b - x),$$

$$f_5(x) = -\left(\frac{1}{2} - \nu_1\right) bx + \frac{1}{2} x^2.$$

Ayant ψ_3 et f_5, il suffit de prendre les différences

$$F(x) - \psi_3(x) = f_3(x),$$
$$F(x) - f_5(x) = \psi_5(x),$$

pour compléter la solution relative à la première travée.

2° *Travée centrale.* — Nous nommons ainsi une travée dont le milieu coïncide avec celui de la poutre, ce qui ne peut arriver que pour les poutres ayant un nombre impair de travées. Il est bien facile de reconnaître que dans ce cas f_1 et f_5 doivent être symétriques relativement au milieu de la travée, de sorte qu'après avoir calculé f_1 on pourrait obtenir f_5 par l'équation

$$f_5(x) = f_1(b\delta - x).$$

On peut aussi procéder comme s'il s'agissait d'une travée intermédiaire de rang quelconque : seulement le tableau XI ne donne plus, d'une manière immédiate, les rapports ν et ν' (n° 52) qui définissent les moments aux extrémités $A_{\frac{1}{2}(n-1)}$, $A_{\frac{1}{2}(n+1)}$ de la travée. Pour les avoir, il faudra supposer une surcharge symétrique de celle qui répondrait à f_5, et prendre les moments de flexion aux points symétriques; c'est-à-dire qu'on cherchera, par le tableau XI, le moment de flexion en $A_{\frac{1}{2}(n+1)}$ s'il s'agit de ν, et le moment en $A_{\frac{1}{2}(n-1)}$ s'il s'agit de ν'. Un exemple rendra cela plus clair. Supposons qu'on demande $f_5(x)$ dans la quatrième travée d'une poutre à sept travées égales : il faudrait avoir les moments X_3 et X_4 sous la surcharge des travées n°s 2, 4, 5, 7. Or, on a, par raison de symétrie,

$$X_3^{2.4.5.7} = X_4^{1.3.4.6},$$
$$X_4^{2.4.5.7} = X_3^{1.3.4.6};$$

donc le tableau XI, où sont inscrits les moments $X_4^{1.3.4.6}$ et $X_3^{1.3.4.6}$, donnera

$$\nu = \frac{1}{p'b^2} X_3^{2.4.5.7} = \frac{1}{p'b^2} X_4^{1.3.4.6} = 0{,}022930,$$

$$\nu' = \frac{1}{p'b^2} X_4^{2.4.5.7} = \frac{1}{p'b^2} X_3^{1.3.4.6} = 0{,}114394.$$

Le calcul de f_5 s'achèverait ensuite comme au n° 52.

54. *Formulaire analytique donnant sans calcul les fonctions* F, f_1, ψ_3, f_5. — En résumé, on voit qu'après avoir préalablement déterminé (n° 42) le moment X dû à l'effet spécial de la charge permanente [ou la fonction $F(x)$], si les valeurs du nombre n des travées et du rapport δ permettent de recourir aux tableaux X et XI, la recherche des limites X' et X'' n'exigera plus qu'un petit nombre d'opérations très-simples et très-élémentaires. Afin de rendre encore plus immédiate la détermination de X, X', X'', nous avons construit un Formulaire analytique (*voir* à la fin de ce volume), où l'on trouve par une simple lecture les expressions de $F(x)$, $f_1(x)$, $\psi_3(x)$, $f_5(x)$, dans les mêmes limites de n et de δ, c'est-à-dire pour les poutres de trois à douze travées inclusivement, dans lesquelles le rapport entre les ouvertures d'une travée intermédiaire quelconque et d'une travée extrême prend l'une des huit valeurs

$$0{,}7,\quad 0{,}8,\quad 0{,}9,\quad 1{,}0,\quad 1{,}1,\quad 1{,}2,\quad 1{,}25,\quad 1{,}3.$$

Nous avons cru devoir néanmoins présenter les explications qui précèdent (n°s 52 et 53), tant pour faire comprendre la construction du Formulaire, que pour mettre le lecteur en mesure de traiter les cas où se présenteraient d'autres valeurs de n ou de δ, ce qui obligerait d'employer les formules des §§ I, II, III et IV de ce chapitre.

55. *Recherche de la limite* X'''. — Nous avons ainsi nommé, dans l'exemple du n° 29, la limite supérieure des moments, pris en grandeur absolue, qui se produisent en tout point de la pièce, sous l'action combinée de la charge et de la surcharge. Cette limite, la seule qu'on ait ordinairement besoin

de connaître, est (nº 24) la plus forte, en valeur absolue, des deux sommes algébriques $X+X'$ et $X+X''$: on l'obtient en ajoutant le moment X dû à la charge permanente avec celui des deux moments X' ou X'' qui a même signe que X, et prenant, bien entendu, la somme en valeur absolue.

Or, quand la charge permanente agit seule, nous savons (nº 36) que les moments X_m sur les points d'appui sont presque toujours positifs; il n'y a d'exception que pour ceux dont l'indice est pair quand on donne le rang o à la culée la plus voisine, et encore faut-il que δ reçoive des valeurs inusitées en pratique : nous admettrons donc que les X_m sont positifs sans exception, dans les poutres qu'on peut avoir à étudier. De même, en nous reportant aux résultats fournis par la discussion des nºs 37 et 41, nous admettrons que X s'annule ordinairement pour deux valeurs réelles x_1 et x_2 de x, de sorte qu'il est négatif dans l'intervalle. S'il s'agit de la première travée, on a $x_1 = 0$. Cela posé, il en résulte comme conséquence immédiate qu'on a, sauf des exceptions qu'il serait facile, mais peu utile, de préciser :

Dans la première travée.

Entre $x=0$ et $x=x_2$....... $X'''=-X-X''$,
Entre $x=x_2$ et $x=b$........ $X'''=X+X'$.

Dans une travée intermédiaire quelconque.

Entre $x=0$ et $x=x_1$ }
Entre $x=x_2$ et $x=c$ }...... $X'''=X+X'$,
Entre $x=x_1$ et $x=x_2$....... $X'''=-X-X''$.

Puisqu'on connaît déjà x_1, x_2 ainsi que X, X', X'', le problème peut être considéré comme entièrement résolu.

56. *Exemple numérique.* — Supposons une poutre à six travées, le rapport δ étant égal à 1,25, comme dans l'exemple commencé au nº 43 et deux fois repris aux nºs 48 et 51. Nous ne fixerons pas les valeurs numériques des longueurs b, c des travées, ni des intensités p et p' de la charge permanente et de la surcharge : ces éléments du problème figureront algé-

briquement dans les résultats. On demande, pour les trois premières travées, d'indiquer les moments X, X', X'', X'''. A cet effet, voici la marche qu'il faut suivre.

Le moment de flexion X produit par la charge permanente étant exprimé par $pF(x)$, on trouve d'abord dans le Formulaire analytique donné à la fin de ce volume :

Première travée.... $F(x) = -0,372306\,bx + \frac{1}{2}x^2$,

Deuxième travée... $F(x) = 0,127694\,b^2 - 0,622414\,bx + \frac{1}{2}x^2$,

Troisième travée... $F(x) = 0,130927\,b^2 - 0,625862\,bx + \frac{1}{2}x^2$ (*).

On rappelle ici les valeurs trouvées au n° 43 (deuxième exemple), pour les abscisses x_1, x_2 des points où X et $F(x)$ s'annulent :

Première travée...... $x_1 = 0$, $x_2 = 0,74461\,b$;
Deuxième travée..... $x_1 = 0,20726\,c$, $x_2 = 0,78860\,c$;
Troisième travée..... $x_1 = 0,21241\,c$, $x_2 = 0,78897\,c$.

Ces valeurs ont été fournies par le tableau VI.

Les tableaux VIII et IX nous fournissent ensuite les abscisses x', x'', x''', x^{IV}, déjà données à titre d'exemple (n° 48) :

Première travée.

$$x' = x'' = x''' = 0, \quad x^{\text{IV}} = 0,87995\,b.$$

Deuxième travée.

$$x' = 0,12475\,c, \quad x'' = 0,21739\,c,$$
$$x''' = (1 - 0,21133)\,c = 0,78867\,c, \quad x^{\text{IV}} = 0,88056\,c.$$

(*) Il est essentiel de ne pas oublier que, dans chaque travée, les abscisses sont comptées à partir du commencement de la travée : le numérotage des appuis et des travées étant fait comme il est dit dans les préliminaires du chapitre deuxième (n° 30), l'origine des x sera en A_{m-1} pour la travée $A_{m-1}A_m$.

Troisième travée.

$$x' = 0,12041\,c, \quad x'' = 0,21176\,c,$$
$$x''' = (1 - 0,21136)\,c = 0,78864\,c, \quad x^{\text{iv}} = 0,87994\,c.$$

Maintenant nous prendrons dans le Formulaire les résultats ci-dessous :

Première travée... $\begin{cases} f_5(x) = -0,347678\,bx + \frac{1}{2}x^2, \\ \psi_3(x) = -0,464605\,bx + \frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

Deuxième travée. $\begin{cases} f_1(x) = 0,152322\,b^2 - 0,713044\,bx + \frac{1}{2}x^2, \\ f_5(x) = 0,061192\,b^2 - 0,537687\,bx + \frac{1}{2}x^2, \\ \psi_3(x) = 0,092298\,b^2 - 0,652158\,bx + \frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

Troisième travée.. $\begin{cases} f_1(x) = 0,170333\,b^2 - 0,730286\,bx + \frac{1}{2}x^2, \\ f_5(x) = 0,043373\,b^2 - 0,520798\,bx + \frac{1}{2}x^2, \\ \psi_3(x) = 0,072576\,b^2 - 0,631121\,bx + \frac{1}{2}x^2. \end{cases}$

Nous en déduirons immédiatement, par les relations (3) et (4) des n°s 26 et 27 :

Première travée.

$$f_3(x) = \mathrm{F}(x) - \psi_3(x) = 0,092299\,bx \quad (*),$$
$$\psi_5(x) = \mathrm{F}(x) - f_5(x) = -0,024628\,bx.$$

(*) Les fonctions $f_3(x)$ dans la première travée et $\psi_3(x)$ dans la seconde répondent à une même surcharge, celle des travées de rang pair. La première fonction devient égale à $0,092299\,b^2$ pour $x = b$, et la seconde égale à $0,092298\,b^2$ pour $x = 0$: ces deux valeurs devraient être égales, car elles représentent toutes deux $\frac{1}{p'}\,\mathrm{X}_1^{2.4.6}$. La différence de $0,000001\,b^2$ qu'on trouve ici (et quelques autres du même ordre, qu'on pourra remarquer) tient à l'influence des décimales négligées.

Deuxième travée.

$$f_2(x) = \psi_5(x) = \mathrm{F}(x) - f_5(x) = 0{,}066502\,b^2 - 0{,}084727\,bx,$$
$$f_3(x) = \mathrm{F}(x) - \psi_3(x) = 0{,}035395\,b^2 - 0{,}029744\,bx,$$
$$f_4(x) = \psi_1(x) = \mathrm{F}(x) - f_1(x) = -0{,}024628\,b^2 + 0{,}090630\,bx,$$
$$\psi_2(x) = f_5(x), \quad \psi_4(x) = f_1(x).$$

Troisième travée.

$$f_2(x) = \psi_5(x) = \mathrm{F}(x) - f_5(x) = 0{,}087554\,b^2 - 0{,}105064\,bx,$$
$$f_3(x) = \mathrm{F}(x) - \psi_3(x) = 0{,}058351\,b^2 + 0{,}005259\,bx,$$
$$f_4(x) = \psi_1(x) = \mathrm{F}(x) - f_1(x) = -0{,}039406\,b^2 + 0{,}104424\,bx,$$
$$\psi_2(x) = f_5(x), \quad \psi_4(x) = f_1(x).$$

S'il y avait un plus grand nombre de travées, les mêmes calculs se répéteraient un plus grand nombre de fois, mais sans plus de difficulté ni de complication, autant du moins qu'on resterait dans les limites de nos tableaux numériques.

On possède maintenant tous les éléments nécessaires pour écrire les équations de la limite en grandeur absolue X''', suivant ce qui a été dit au n° 55. Voici les résultats :

Première travée.

Depuis $x = 0$, jusqu'à $x = x_2 = 0{,}74461\,b$,

$$\mathrm{X}''' = (0{,}372306\,p + 0{,}464605\,p')\,bx - \frac{1}{2}(p + p')\,x^2;$$

Depuis $x = 0{,}74461\,b$, jusqu'à $x = x^{\mathrm{IV}} = 0{,}87995\,b$,

$$\mathrm{X}''' = (-0{,}372306\,p + 0{,}092299\,p')\,bx + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = 0{,}87995\,b$, jusqu'à $x = b$,

$$\mathrm{X}''' = -(0{,}372306\,p + 0{,}347678\,p')\,bx + \frac{1}{2}(p + p')\,x^2.$$

Deuxième travée.

Depuis $x = 0$, jusqu'à $x = x' = 0{,}12475\,c$,

$$X''' = (0{,}127694\,p + 0{,}152322\,p')\,b^2$$
$$-(0{,}622414\,p + 0{,}713044\,p')\,bx + \frac{1}{2}(p + p')\,x^2;$$

Depuis $x = 0{,}12475\,c$, jusqu'à $x = x_1 = 0{,}20726\,c$,

$$X''' = (0{,}127694\,p + 0{,}066502\,p')\,b^2$$
$$-(0{,}622414\,p + 0{,}084727\,p')\,bx + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = 0{,}20726\,c$, jusqu'à $x = x'' = 0{,}21739\,c$,

$$X''' = -(0{,}127694\,p + 0{,}061192\,p')\,b^2$$
$$+(0{,}622414\,p + 0{,}537687\,p')\,bx - \frac{1}{2}(p + p')\,x^2;$$

Depuis $x = 0{,}21739\,c$, jusqu'à $x = x_2 = 0{,}78860\,c$,

$$X''' = -(0{,}127694\,p + 0{,}092298\,p')\,b^2$$
$$+(0{,}622414\,p + 0{,}652158\,p')\,bx - \frac{1}{2}(p + p')\,x^2;$$

Depuis $x = 0{,}78860\,c$, jusqu'à $x = x''' = 0{,}78867\,c$,

$$X''' = (0{,}127694\,p + 0{,}035395\,p')\,b^2$$
$$-(0{,}622414\,p - 0{,}029744\,p')\,bx + \frac{1}{2}px^2\ (*);$$

Depuis $x = 0{,}78867\,c$, jusqu'à $x = x^{\text{IV}} = 0{,}88056\,c$,

$$X''' = (0{,}127694\,p - 0{,}024628\,p')\,b^2$$
$$-(0{,}622414\,p - 0{,}090630\,p')\,bx + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = 0{,}88056\,c$, jusqu'à $x = c$,

$$X''' = (0{,}127694\,p + 0{,}061192\,p')\,b^2$$
$$-(0{,}622414\,p + 0{,}537687\,p')\,bx + \frac{1}{2}(p + p')\,x^2.$$

(*) Cette équation, applicable à une fraction presque imperceptible de la travée ($0^{\text{m}}{,}007$ sur une travée de 100 mètres), n'est donnée ici que pour mémoire.

Troisième travée.

Depuis $x = 0$, jusqu'à $x = x' = 0,12041\,c$,

$$X''' = (0,130927\,p + 0,170333\,p')\,b^2 - (0,625862\,p + 0,730286\,p')\,bx + \frac{1}{2}(p + p')\,x^2;$$

Depuis $x = 0,12041\,c$, jusqu'à $x = x'' = 0,21176\,c$,

$$X''' = (0,130927\,p + 0,087554\,p')\,b^2 - (0,625862\,p + 0,105064\,p')\,bx + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = 0,21176\,c$, jusqu'à $x = x_1 = 0,21241\,c$,

$$X''' = (0,130927\,p + 0,058351\,p')\,b^2 - (0,625862\,p - 0,005259\,p')\,bx + \frac{1}{2}px^2\ (*);$$

Depuis $x = 0,21241\,c$, jusqu'à $x = x''' = 0,78864\,c$,

$$X''' = -(0,130927\,p + 0,072576\,p')\,b^2 + (0,625862\,p + 0,631121\,p')\,bx - \frac{1}{2}(p + p')\,x^2;$$

Depuis $x = 0,78864\,c$, jusqu'à $x = x_2 = 0,78897\,c$,

$$X''' = -(0,130927\,p + 0,170333\,p')\,b^2 + (0,625862\,p + 0,730286\,p')\,bx - \frac{1}{2}(p + p')\,x^2\ (**);$$

Depuis $x = 0,78897\,c$, jusqu'à $x = x^{\text{iv}} = 0,87994\,c$,

$$X''' = (0,130927\,p - 0,039406\,p')\,b^2 - (0,625862\,p - 0,104424\,p')\,bx + \frac{1}{2}px^2;$$

Depuis $x = 0,87994\,c$, jusqu'à $x = c$,

$$X''' = (0,130927\,p + 0,043373\,p')\,b^2 - (0,625862\,p + 0,520798\,p')\,bx + \frac{1}{2}(p + p')\,x^2.$$

(*) Cette équation pourrait encore être négligée dans la pratique, puisqu'elle s'applique à 0,00065 (environ $\frac{1}{1500}$) de la travée seulement.

(**) Observation analogue.

57. ***Représentation graphique de la limite*** X''' ***dans l'exemple précédent.*** — Sur une droite horizontale 0123 (*Pl.* 17 de l'Atlas, *fig.* 41), on a pris les intervalles 0-1, 1-2, 2-3 respectivement égaux à $0^m,100$, $0^m,125$, $0^m,125$, pour représenter les trois travées dont les longueurs sont b, c, c; en dessous de cette ligne, considérée comme axe des abscisses, on a porté en ordonnées ce que deviennent les rapports $\frac{X'''}{pb^2}$ dans l'hypothèse $p'=0$: on a ainsi obtenu la courbe, ou plutôt polygone curviligne, 0 BCDEFGHIKLM, qui représente pour la demi-poutre la série de valeurs de $\frac{F(x)}{b^2}$, abstraction faite du signe. Les points 0, C, E, G, I, L ne sont autres que ceux qui se rapportent aux abscisses x_1, x_2 dans chaque travée. De même, on a porté au-dessus de l'axe des abscisses ce que devient $\frac{X'''}{p'b^2}$ dans l'hypothèse $p=0$, en ne prenant que la portion de X''' spécialement due à p'; c'est-à-dire $-\frac{X''}{p'b^2}$ entre les abscisses x_1 et x_2 de chaque travée, et $\frac{X'}{p'b^2}$ dans le surplus (nº 55). On a obtenu ainsi un autre polygone composé de portions droites et d'arcs de parabole, commençant également sur la culée 0 et finissant en N, au-dessus de la troisième pile.

L'échelle des ordonnées est de $0^m,50$ pour le rapport 1 : ainsi, par exemple, au point 3, le rapport $\frac{X'}{p'b^2}$, que l'on doit compter en ordonnée au-dessus de l'axe, a pour grandeur réelle 0,1736; son ordonnée représentative est $0^m,0868$.

D'après la manière dont la figure a été construite, si l'on veut déterminer X''' à l'aide de cette figure, en un point quelconque de la pièce, cela sera bien facile : on cherchera d'abord ce point sur l'axe des x, d'après le rapport entre la longueur effective de la travée qui le contient et sa distance à l'un des appuis; ensuite, pour ce point de l'axe, on évaluera, en fractions du mètre, les grandeurs réelles sur le dessin (*), de l'or-

(*) On fera bien d'employer pour cette évaluation l'échelle, remplaçant une règle graduée, qui se trouve au bas de chaque planche, afin d'éviter ou d'atténuer l'erreur produite par le retrait du papier après l'impression.

donnée y' en dessous, et de l'ordonnée y'' en dessus; enfin l'on posera

$$X''' = 2b^2(y'p + y''p').$$

La figure ne suppose donc aucune valeur particulière des données b, p, p', et servira toujours, pourvu que la poutre ait six travées, et que le rapport δ des travées intermédiaires et de rive soit égal à 1,25.

La même figure met en évidence plusieurs maxima par lesquels passe la fonction X''' et qu'il serait facile de déterminer directement d'après les expressions successives précédemment données (n° 56) de cette fonction. On remarque :

1° Trois maxima sur les points d'appui, savoir :

$(0,1277p + 0,1523p')b^2$, sur la 1re pile,
$(0,1309p + 0,1703p')b^2$, sur la 2e pile,
$(0,1298p + 0,1736p')b^2$, sur la 3e pile.

2° Trois maxima dans l'intervalle des points d'appui. Ici les maxima des courbes supérieure et inférieure ne coïncident pas rigoureusement, et en conséquence les maxima de X''' pourraient varier un peu en position et en grandeur avec le rapport $\frac{p}{p'}$; mais on a une approximation suffisante (et en tout cas une limite supérieure) en faisant la somme des maxima partiels au-dessous et au-dessus de l'axe des abscisses. On trouve ainsi :

$(0,0693p + 0,1079p')b^2$, vers le milieu de la 1re travée,
$(0,0660p + 0,1204p')b^2$, » » 2e travée,
$(0,0649p + 0,1298p')b^2$, » » 3e travée.

Les cotes mises à côté des ordonnées expriment le double de leur grandeur réelle sur le dessin, en fraction du mètre : ce sont donc ces cotes elles-mêmes (et non leur double) qu'il faut multiplier par pb^2 ou $p'b^2$, pour avoir les moments correspondants. Les distances horizontales sont cotées en millimètres et fractions du millimètre : en les divisant par 100, on aurait leurs rapports à la longueur d'une travée de rive.

On sait que les limites positive et négative X′ et X″ changent de forme quatre fois dans chaque travée intermédiaire, quand l'abscisse x passe par les valeurs x', x'', x''', x^{IV} : la limite X‴ doit donc changer en même temps. Mais de plus on sait que X′ se remplace par — X″ dans l'expression de celle-ci, ou inversement, lorsque x devient égal à x_1 ou à x_2: ainsi cela fait en tout six changements de forme pour X‴, c'est-à-dire sept formes différentes de la fonction de x qui en donne les valeurs. Le polygone mixtiligne représentant la portion de X‴ spécialement produite par la surcharge doit donc en général se composer de sept lignes droites ou arcs de parabole. Toutefois, conformément à une remarque déjà faite (n° 44), il arrive souvent qu'il y a égalité approximative entre x_1 et x'', d'une part, x_2 et x''', d'autre part; le fait se produit surtout quand δ est voisin de 1,1 ou de 1,2; alors les différences $x_1 - x''$, $x_2 - x'''$ devenant trop faibles pour être représentées à l'échelle ci-dessus définie, les sept lignes sont réduites à six ou même à cinq. C'est ce qui est arrivé notamment dans la *fig.* 41, deuxième et troisième travées : pour la deuxième on a

$$x''' - x_2 = 0{,}00007\,c,$$

et pour la troisième

$$x_1 - x'' = 0{,}00065\,c, \quad x_2 - x''' = 0{,}00033\,c;$$

et attendu que la longueur c est représentée par 125 millimètres, on aurait respectivement pour ces trois différences

$$0^{\text{mm}},009, \quad 0^{\text{mm}},081, \quad 0^{\text{mm}},041.$$

La plus grande n'atteindrait pas $\frac{1}{12}$ de millimètre, distance trop faible pour qu'il y eût possibilité de la dessiner clairement. Nous avons donc adopté le parti de supprimer une des deux ordonnées qui répondent à des abscisses aussi peu éloignées l'une de l'autre, et nous avons inscrit deux cotes à côté de l'ordonnée unique qui les remplace. Comme d'ailleurs ces deux cotes sont toujours égales ou presque égales, cette simplification ne saurait entraîner d'erreur appréciable en pratique.

Le terme du second degré dans X‴ est $\frac{1}{2}px^2$ ou $\frac{1}{2}p'x^2$, suivant qu'on a $p'=0$ ou $p=0$. Tous les arcs de parabole de la *fig.* 41 auraient donc pour équation commune

$$y=\frac{x^2}{2b^2},$$

si on les rapportait à la tangente au sommet et à l'axe principal, pris respectivement pour axes des x et des y. Or, une longueur de $0^m,1$ représente b sur le dessin; en outre, les ordonnées y sont réduites à moitié : donc, en appelant x' et y' les coordonnées mesurées sur le dessin, pendant que x et y seraient les grandeurs naturelles correspondantes, on aura

$$x'=0,1\frac{x}{b},\quad y'=\frac{1}{2}y :$$

éliminant x et y, il vient pour l'équation commune de toutes les paraboles du dessin

$$x'^2=0,04y'.$$

Tous ces arcs de parabole peuvent donc être tracés avec un même patron, appartenant à une parabole de $0^m,04$ de paramètre. Cette parabole aurait $0^m,01$ pour distance du foyer au sommet : ou bien encore ce serait une parabole de $0^m,16$ de corde sur $0^m,16$ de flèche.

58. *Formulaire graphique,* 1° *pour la poutre à deux travées égales,* 2° *pour les poutres de trois à sept travées inclusivement, le rapport* δ *entre les longueurs des travées intermédiaires et de rive pouvant prendre les huit valeurs*

0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,25, 1,3.

— Ce Formulaire consiste uniquement dans la réunion d'un certain nombre de figures portant les nos 10 à 50 (*), et construites suivant la méthode qu'on vient d'expliquer (n° 57) à l'occasion de la *fig.* 41 : nous avons donc dû commencer par

(*) La *fig.* 10 se trouve dans la *Pl. A*, à la fin du volume; les autres forment les vingt-quatre planches de l'Atlas.



rechercher les équations de la limite X‴, comme au n° 56, et par la répétition de calculs en tout point semblables, que nous avons eu soin de faire marcher parallèlement pour les huit rapports δ, afin d'économiser le temps. Quant à la poutre à deux travées égales, qui ne peut être traitée de la même manière, on trouvera son calcul un peu plus loin.

Ces figures suffisent, comme on l'a montré (n° 57), pour avoir X‴ en fonction de b, p, p'.

Elles sont toutes construites à la même échelle de 0^m,100 pour représenter la longueur b des travées de rive, et de 0^m,5 pour représenter le rapport 1 en ordonnée verticale; elles donnent lieu d'ailleurs aux mêmes observations que la *fig.* 41.

Nous nous sommes arrêté au chiffre de sept travées, parce que les poutres de huit travées ou plus commencent à constituer l'exception, et que celles de trois, quatre ou cinq travées sont de beaucoup les plus ordinaires; mais si l'on voulait prolonger cette représentation graphique jusqu'à douze travées, en adoptant toujours les mêmes valeurs de δ, on y parviendrait sans beaucoup de peine à l'aide des tableaux numériques V à XI, ainsi que du Formulaire analytique donné à la fin de cet ouvrage, qui renferment tous les principaux éléments à calculer, et ne laissent à faire que des opérations d'arithmétique très-simples. On pourrait aussi recourir aux tableaux XII et XIII dont nous allons parler maintenant.

Comme on l'a constaté au n° 57 sur un exemple particulier, et comme on le voit d'ailleurs en parcourant les diverses figures de l'Atlas, il y a vers le milieu de chaque travée un maximum des moments fléchissants dus à la surcharge. Pour compléter les renseignements déjà donnés, nous avons formé les tableaux XII et XIII (*voir* à la fin du chapitre deuxième), où l'on trouve les abscisses x^v et les ordonnées $G.p'b^2$ (en valeur absolue) de ces maxima. Les abscisses x^v sont définies par leur rapport à la longueur de la travée correspondante; elles se comptent à partir de l'origine de chaque travée : ainsi, dans la travée $A_{n-1}A_n$, leur point de départ est A_{n-1}. Enfin, nous nous sommes contenté, comme toujours, de fournir les résultats relatifs à la première moitié de la poutre.

Les abscisses x^v peuvent également se déduire de notre

Formulaire analytique. Sauf de rares exceptions, les maxima dont nous nous occupons sont négatifs et appartiennent à la fonction $p'\psi_3(x)$, dont on trouve dans le Formulaire l'expression

$$p'\left(\alpha b^2 - 6bx + \frac{1}{2}x^2\right);$$

le maximum s'obtient donc en faisant $x = 6b = x^{v}$, et le coefficient G a pour valeur correspondante

$$G = \frac{1}{2}6^2 - \alpha.$$

Il y a exception, dans la seconde travée, pour les poutres à cinq travées, lorsque δ est égal à 0,7, parce que le maximum de $\psi_3(x)$ tombe en dehors des limites x'', x''', entre lesquelles s'applique cette fonction. Dans la travée centrale d'une poutre à trois travées, δ étant égal à 0,7 ou à 0,8, le maximum en question n'appartient pas à $\psi_3(x)$, mais bien à $f_3(x)$; cependant sa position répond à la même abscisse, qui est celle du milieu de la travée.

Les tableaux XII et XIII font connaître x^{v} et G pour toutes les poutres de trois à douze travées, le rapport δ conservant toujours les huit valeurs précédemment adoptées. Et même, en vertu d'observations déjà faites à propos du tableau VII (n° 43), il est applicable au moins approximativement, quel que soit le nombre des travées : dans chaque travée dont le rang n'atteint pas 7, on prendrait les résultats fournis par les deux tableaux, en regard du nombre n des travées, si ce nombre s'y trouve inscrit pour la travée dont on s'occupe; et s'il dépasse le dernier nombre inscrit, on prendra les résultats relatifs à ce dernier nombre. Dans toutes les travées dont le rang m est au moins 7, le nombre n atteignant ou dépassant 13, on pourra considérer les résultats comme égaux à leurs limites pour m et n infinis, car la différence est déjà faible dans la sixième travée d'une poutre à douze travées.

Quant à ces limites, on les obtient en remarquant que, d'après les formules du n° 49, les limites correspondantes des

moments sur les appuis A_{m-1}, A_m sont $\frac{1}{24}p'b^2\delta^2$: il en résulte qu'on a

$$\lim \psi_3(x) = \frac{1}{24}b^2\delta^2 - \frac{1}{2}x(b\delta - x),$$

et par suite

$$\lim x^v = \frac{1}{2}b\delta \quad \text{ou} \quad \lim \frac{x^v}{c} = 0,5,$$

$$\lim G = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)\delta^2 = \frac{1}{12}\delta^2.$$

La dernière formule conduit aux huit valeurs ci-dessous de lim G, quand δ est l'un des nombres que nous avons choisis :

0,0408, 0,0533, 0,0675, 0,0833,
0,1008, 0,1200, 0,1302, 0,1408.

59. *Remarque sur une ordonnée particulière des courbes représentant les limites* X′, X″ *dans la seconde travée.* — Il est assez remarquable que les valeurs de X′ et X″ au point ayant pour abscisse x'', dans la seconde travée, sont constantes, quel que soit le nombre n des travées de la poutre. La même propriété s'étend, comme conséquence immédiate, au moment X dû à la charge permanente.

La limite X′ répond, pour ce point considéré comme appartenant à la région (x'', x'''), à la surcharge de toutes les travées impaires (n° 26). Or (n° 19) les surcharges sur les 3ᵉ, 5ᵉ, 7ᵉ, ... travées donneront un moment nul en ce point : X′ se réduit donc à ce que produit la surcharge de la première travée. On verrait de même que X″ se réduit au moment que donne la surcharge de la seconde travée.

Maintenant, si la première travée est seule surchargée, on a (n° 18)

$$X_1 = \frac{1}{4}p'b^2\gamma_{n-1} = -\frac{1}{4}p'b^2\frac{u_{n-1}}{u_n},$$

et par suite

$$X_2 = \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}X_1 = -\frac{1}{4}p'b^2\frac{u_{n-2}}{u_n}.$$

Le moment en un point quelconque de la seconde travée, répondant à l'abscisse x comptée depuis l'origine A_1 de cette travée, sera donc (n° 1)

$$X_1 + (X_2 - X_1)\frac{x}{c} = \frac{p'b^2}{4u_n}\left[-u_{n-1} + (u_{n-1} - u_{n-2})\frac{x}{c}\right];$$

et attendu que l'abscisse x'' a pour valeur

$$x'' = c\frac{\beta_1}{1+\beta_1} = c\frac{-\frac{u_1}{u_2}}{1-\frac{u_1}{u_2}} = c\frac{u_1}{u_1-u_2},$$

on aura pour la limite X', au point que définit cette abscisse,

$$X' = \frac{p'b^2}{4u_n}\left[-u_{n-1}+\frac{u_1}{u_1-u_2}(u_{n-1}-u_{n-2})\right] = \frac{1}{4}p'b^2\frac{u_2u_{n-1}-u_1u_{n-2}}{u_n(u_1-u_2)}.$$

Or, les équations qui déterminent la série des u (n° 31) donnent

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -\frac{2(1+\delta)}{\delta},$$

$$u_2u_{n-1}-u_1u_{n-2} = -\frac{2(1+\delta)}{\delta}u_{n-1}-u_{n-2} = \frac{u_n}{\delta}:$$

donc la valeur ci-dessus de X' au point (x'') devient

$$X' = \frac{p'b^2}{4\delta(u_1-u_2)} = \frac{p'b^2}{4(3\delta+2)},$$

formule indépendante de n.

Pour avoir X'' au même point, nous devons supposer la surcharge sur la seconde travée seule : un calcul déjà fait au n° 20 nous donne alors

$$\frac{2X''}{p'c^2} = -\frac{\beta(1-\beta)}{2(1+\beta)^2}.$$

Si l'on substitue dans cette dernière valeur

$$\beta = -\frac{u_1}{u_2} = \frac{\delta}{2(1+\delta)},$$

il vient finalement

$$X'' = -\frac{1}{4}p'c^2\frac{\delta(2+\delta)}{(3\delta+2)^2},$$

formule également indépendante du nombre n des travées.

60. *Résumé succinct des paragraphes précédents; guide pratique.* — Passons maintenant brièvement en revue et posons comme conclusion de la théorie exposée dans les §§ I à V, la série d'opérations qu'il faudrait exécuter pour résoudre le problème qui fait l'objet de ce chapitre, savoir :

Étant donnée une poutre symétrique, à travées intermédiaires égales, posée sur des appuis au même niveau, et devant supporter : 1° une charge permanente uniforme sur sa longueur entière; 2° une surcharge s'étendant sur un nombre arbitraire de travées, mais ayant sur les travées qu'elle recouvre une répartition également uniforme; on demande :

Le moment fléchissant X dû à l'action isolée de la charge permanente, en tout point de la poutre;

Les limites, positive et négative, X′ et X″, des moments que peuvent produire en ce même point les diverses combinaisons de surcharge, agissant à l'exclusion de la charge permanente;

La limite X‴ des valeurs absolues que peut prendre le moment fléchissant, au même point, sous l'action simultanée de la charge permanente et de la surcharge, celle-ci passant successivement par tous les états qu'il est permis de lui attribuer.

Dans l'exposé ci-après, nous rappelons toute la solution, comme si le rapport δ entre les longueurs d'une travée intermédiaire et d'une travée de rive ne figurait pas parmi les huit nombres

$$0,7, \quad 0,8, \quad 0,9, \quad 1,0, \quad 1,1, \quad 1,2, \quad 1,25, \quad 1,3,$$

que nous avons plus spécialement étudiés. S'il en était différemment, nos tableaux numériques d'une part, et d'autre part le Formulaire analytique par lequel se termine cet ouvrage, donneraient immédiatement la plus grande partie des résultats cherchés; la solution serait même complète pour les poutres de sept travées au plus, si l'on voulait se contenter de notre Formulaire graphique (n° 58), parfaitement suffisant, à notre avis, pour les besoins de la pratique; pour les poutres de huit à douze travées, il y manquerait fort peu de chose, comme nous l'avons déjà dit.

(*a*). On commencera par copier sur une feuille, de manière à les avoir sous les yeux, les séries

$$M_m, \quad N_m, \quad h_m,$$

calculées une fois pour toutes aux n°s 32 et 33, l'indice m pouvant, dans les deux premières, être la moitié d'un nombre

impair. Il sera bon d'y joindre les nombres

$$\sqrt{3} = 1,73205\,08075\,68877\,29348\ldots,$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0,57735\,02691\,89625\,76449\ldots,$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{3}} = 0,75983\,56856\,51592\,54731\,8\ldots.$$

On se rappellera que l'indice q désigne dans les formules $\frac{1}{2}(n-2)$, n étant le nombre des travées, et que h sans indice désigne h_{n-2} ou h_{2q}, égal au quotient $\frac{M_q}{N_q}$.

(b). On déduira des longueurs données des travées le rapport

$$\delta = \frac{\text{longueur d'une travée intermédiaire}}{\text{longueur d'une travée extrême}},$$

qui lui-même servira à calculer les séries des nombres u_m et β_m, suivant les formules des nos 31, 32 et 33. Pour la série des u, le procédé le plus commode semble être de calculer d'abord

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -\frac{2(1+\delta)}{\delta},$$

puis d'aller de proche en proche au moyen de la relation

$$u_k + 4u_{k+1} + u_{k+2} = 0,$$

qui donne successivement u_3, u_4, u_5, ... jusqu'à u_{n-1}; d'ailleurs on déduit u_n de l'équation

$$u_n = -2(1+\delta)u_{n-1} - u_{n-2}\delta.$$

Quant à la série des nombres β, on a $\beta_0 = 0$, et l'on trouve par divisions successives

$$\beta_{m-1} = -\frac{u_{m-1}}{u_m}.$$

(c). On calcule par les formules du no 35 les moments de flexion X_m sur les points d'appui, spécialement produits par la charge permanente. Provisoirement on ne réduit pas en

nombres le facteur pb^2 qui entre dans ces formules. On calcule ensuite (nos 37 à 42) :

L'expression du rapport $\frac{X}{pb^2}$ pour un point quelconque,

Les maxima de ce rapport,

Les abscisses x_1, x_2 (presque toujours réelles) des points où le moment X change de signe, en passant par zéro.

(*d*). On calcule par les formules des nos 44 à 47, et pour chaque travée, les abscisses désignées par x', x'', x''', x^{iv} dans la théorie générale des nos 26 et 27, abscisses qui sont celles des points où l'expression algébrique des limites X', X'' change de forme.

(*e*). Supposant une surcharge sur la longueur entière de la poutre, mais de deux en deux travées seulement, alternativement sur celles de rang pair et celles de rang impair, on calcule les moments de flexion aux points d'appui, par les formules du n° 49; on y laisse encore figurer algébriquement le facteur $p'b^2$. Il faut avoir soin d'ailleurs de bien choisir la formule convenant au cas que l'on traite, suivant la parité des nombres m et n.

Comme la surcharge sur les travées paires et celle sur les travées impaires sont *complémentaires* (n° 24), les résultats du calcul qu'on vient d'effectuer servent de contrôle à ceux qu'on a trouvés pour la charge permanente : on a, en effet,

$$\frac{X_m^{2.4.6.8\ldots} + X_m^{1.3.5.7\ldots}}{p'b^2} = \frac{X_m^{1.2.3.4.5\ldots}}{p'b^2} \ (*).$$

Réciproquement, étant donnés les moments X_m dus à la charge permanente (ou plutôt leurs rapports à pb^2) et l'un des rapports $\frac{X_m^{2.4.6.8\ldots}}{p'b^2}$ ou $\frac{X_m^{1.3.5.7\ldots}}{p'b^2}$, on peut en conclure l'autre; mais il est peut-être préférable de profiter du moyen de vérification qui se présente ici.

(*f*). On supposera ensuite une surcharge couvrant les deux

(*) Suivant une notation que nous avons fréquemment employée, les indices supérieurs accolés à la lettre X désignent les numéros d'ordre des travées surchargées.

travées contiguës à un appui A_m, et le surplus de la poutre de deux en deux travées; les formules du n° 50 feront connaître, sous cette surcharge, les moments de flexion en A_{m-1}, A_m, A_{m+1}. On répétera le même calcul en faisant varier m depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}n$ ou $\frac{1}{2}(n-1)$ inclusivement, de manière à parcourir la demi-poutre. On conservera encore le facteur algébrique $p'b^2$.

Le n° 50 renferme un assez grand nombre de formules pour cet objet : on prendra bien garde aux conditions de l'emploi de chacune d'elles.

(g). Les choses étant à ce point, on aura tout ce qu'il faut pour déterminer les limites X' et X'', suivant la marche indiquée aux n°s 52 et 53; on en déduira (n° 55) la limite X''', qui est ordinairement le but final du calcul des moments. Ayant les expressions algébriques de X''', il sera facile de les représenter par des courbes, d'avoir les maxima, minima, etc.

Enfin, pour l'application usuelle, on effectuera le produit des divers coefficients par les facteurs pb^2 ou $p'b^2$, conservés jusqu'à présent sous forme algébrique.

§ VI. — Questions diverses concernant les poutres symétriques et à travées intermédiaires égales.

61. *De la poutre à deux travées égales.* — Quand la poutre est soumise à la charge permanente, à raison de p kilogrammes par mètre courant, si b désigne la longueur de l'une des travées, on aura, pour déterminer le moment de flexion X_1 sur l'appui central, l'équation (10) du n° 6, qui devient ici

$$4X_1 = \frac{1}{2}pb^2, \quad \text{soit} \quad X_1 = \frac{1}{8}pb^2,$$

attendu que les moments X_0, X_2 sur les deux culées sont nuls. Par suite, le moment X spécialement produit par la charge permanente est, à la distance x d'une culée,

$$(1) \qquad X = \frac{1}{8}pb^2 \cdot \frac{x}{b} - \frac{1}{2}px(b-x) = -\frac{3}{8}pbx + \frac{1}{2}px^2.$$

Cette expression représente une parabole ayant pour coordonnées du sommet

$$x=\frac{3}{8}b,\quad X=\frac{9}{128}pb^2-\frac{9}{64}pb^2=-\frac{9}{128}pb^2=-0,0703\,pb^2;$$

X, d'abord négatif à partir de $x=0$, s'annule pour $x=\frac{3}{4}b$, et croît ensuite jusqu'à $0,125pb^2$, maximum positif qu'il atteint pour $x=b$, c'est-à-dire sur l'appui du milieu.

Pour avoir la limite positive X′ des moments dus à la surcharge seule, on sait (n° 27) qu'il faut d'abord supposer la surcharge de la travée n° 2 (si c'est de la première qu'on s'occupe) : on obtient ainsi X′ entre $x=0$ et $x=$ une certaine abscisse x^{IV}. Depuis $x=x^{\text{IV}}$ jusqu'à $x=b$, X′ répond à la surcharge complète des deux travées. Or, si une seule travée porte la surcharge, l'équation (10) du n° 6 devient

$$4X_1=\frac{1}{4}p'b^2,\quad \text{d'où}\quad X_1=\frac{1}{16}p'b^2;$$

donc on aura :

De $x=0$ à $x=x^{\text{IV}}$,

(2) $$X'=\frac{1}{16}p'bx;$$

De $x=x^{\text{IV}}$ à $x=b$,

(3) $$X'=-\frac{3}{8}p'bx+\frac{1}{2}p'x^2.$$

La somme X′ + X″ devant (n° 24) reproduire

$$X\frac{p'}{p}\quad \text{ou}\quad -\frac{3}{8}p'bx+\frac{1}{2}p'x^2,$$

il en résulte immédiatement :

De $x=0$ à $x=x^{\text{IV}}$,

$$X''=-\frac{7}{16}p'bx+\frac{1}{2}p'x^2;$$

De $x=x^{\text{IV}}$ à $x=b$... $X''=0$.

L'abscisse x^{IV}, qui est celle où l'expression (3) doit remplacer (2), pourrait être déterminée en posant

$$\frac{1}{16}p'bx^{\text{IV}} = -\frac{3}{8}p'bx^{\text{IV}} + \frac{1}{2}p'x^{\text{IV}2};$$

on obtient de cette manière $x^{\text{IV}} = \frac{7}{8}b$. C'est ce qu'on trouverait aussi par la formule générale

$$x^{\text{IV}} = b\left(1 - \frac{1}{2}\gamma_{n-1}\right),$$

car dans une poutre à deux travées égales on a

$$u_1 = v_1 = 1, \quad u_2 = v_2 = -4,$$

de sorte que le nombre β_1 ou γ_1 (le seul à considérer ici) a pour valeur $\frac{1}{4}$.

Il ne reste plus qu'à trouver la limite X''' des moments de flexion produits par l'action simultanée de la charge permanente et de la surcharge, ces moments étant pris en grandeur absolue. Or, X est négatif de o à $\frac{3}{4}b$, et positif au delà : donc, suivant les principes généraux (n° 24), il faut prendre :

De $x = 0$ à $x = \frac{3}{4}b$,

$$X''' = \frac{1}{16}(6p + 7p')bx - \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

De $x = \frac{3}{4}b$ à $x = \frac{7}{8}b$,

$$X''' = \frac{1}{16}(-6p + p')bx + \frac{1}{2}px^2;$$

De $x = \frac{7}{8}b$ à $x = b$,

$$X''' = -\frac{3}{8}(p + p')bx + \frac{1}{2}(p + p')x^2.$$

C'est avec ces trois expressions de la limite X^m qu'on a construit la *fig.* 10 (*Pl.* A, *à la fin du volume*), faisant partie du Formulaire graphique (n° 58).

62. *Nécessité de tenir compte des écarts qui pourraient exister entre le polygone primitif et le polygone définitif des appuis.* — Afin de bien faire comprendre notre pensée et d'éviter toute ambiguïté, nous donnerons d'abord une définition précise de ce que nous entendons par *polygone des appuis.* Les appuis réels ou matériels sont les sommets des piles ou culées, sur lesquels repose la face inférieure de la poutre : mais à ceux-là nous en substituons fictivement d'autres, qui sont les points de la fibre moyenne situés verticalement au-dessus des premiers (*). En réunissant chacun de ces points d'appui fictifs au suivant et au précédent, par des lignes droites, on forme le polygone des appuis. Nous rappelons d'ailleurs que nous entendons par forme *naturelle* ou *primitive* d'une pièce, la forme qu'elle aurait si on la construisait en juxtaposant et liant entre eux ses divers éléments, mais sous la condition expresse de ne soumettre la matière à aucune pression ni tension intérieure, comme cela aurait lieu, par exemple, dans une pièce d'un seul morceau, placée sur un cintre ou chantier qui la soustrairait, pour ainsi dire, à l'action de la pesanteur. La forme définitive, au contraire, est une autre forme d'équilibre, qu'elle conserve quand elle est mise en place et abandonnée à l'action des charges, qui produisent simultanément de légères altérations de la figure primitive, et des tensions moléculaires plus ou moins notables. Les points d'appui fictifs pouvant être marqués sur la fibre moyenne construite avec l'une ou l'autre de ces formes, il en résulte qu'on peut aussi considérer deux polygones des appuis, se rapportant, l'un à l'état primitif, l'autre à l'état définitif de la poutre.

Cela posé, on a vu que dans toute la théorie des poutres à plusieurs travées solidaires, depuis le § II du chapitre premier,

(*) Nous raisonnons toujours comme si les supports n'avaient aucune épaisseur parallèlement à l'axe longitudinal de la poutre.

nous avons constamment admis la nullité des ordonnées de la fibre moyenne définitive, par rapport à la fibre moyenne primitive, pour les points situés au-dessus des appuis. Cet énoncé, que nous avons adopté provisoirement parce qu'il était le plus bref, laisse encore subsister un peu de vague; la forme seule de la fibre moyenne primitive est, en effet, bien déterminée par sa définition, mais sa situation ne l'est pas d'une manière absolue. On aura une condition parfaitement claire et précise, en disant que *le polygone primitif et le polygone définitif des appuis doivent être superposables;* ou, ce qui revient au même, que *le polygone primitif des appuis doit rester invariable de forme pendant la déformation imprimée à la poutre par l'action des charges.* Il sera permis alors, dans la formule (6) du n° 2, de supprimer les termes en y_1, y_2, y_3, aussi bien que si ces ordonnées étaient nulles : car la quantité entre crochets dans le premier membre peut s'écrire

$$\frac{y_1 - y_2}{a} + \frac{y_3 - y_2}{a'};$$

on voit donc qu'elle exprime la somme des rotations prises en dessous de l'horizontale, et autour du centre A (*fig.* 2, p. 6), par deux côtés consécutifs AB, AB′ du polygone primitif des appuis, somme nécessairement nulle quand l'angle BAB′ ne varie pas. Par conséquent, on arriverait de cette manière, avec l'hypothèse des charges uniformes, à la formule (10) du n° 6, dont nous avons fait un usage si fréquent et si étendu.

Ainsi donc, si après avoir construit la poutre sur chantier, avec des tensions intérieures nulles, on pouvait la mettre en place SANS LA DÉFORMER LE MOINS DU MONDE, il faudrait qu'alors elle touchât naturellement tous ses appuis, ceux-ci étant supposés posséder une fixité absolue ou étant pris dans la situation finale où ils se trouveront après tous leurs tassements. Cette hypothèse restrictive est essentielle pour la rigueur de nos déductions. Mais s'il en était différemment, si, par exemple, une poutre parfaitement rectiligne sur le chantier de construction, et possédant une section de hauteur constante, était placée sur des supports qui ne seraient pas en ligne droite après leurs tassements, les conditions du calcul seraient tota-

lement changées : dans certains cas particuliers, il pourrait y avoir bénéfice pour la stabilité, et perte dans d'autres. Une variation de niveau, en apparence insignifiante, qu'éprouvera un appui, peut avoir sur l'intensité des moments de flexion une influence considérable : c'est ce que nous allons montrer par un exemple.

Soit donnée une poutre en tôle, à trois travées égales, rigoureusement droite dans l'état naturel, qui doit supporter la charge uniforme de p kilogrammes par mètre courant; ses quatre appuis étant A_0, A_1, A_2, A_3, nous supposerons que le second et le troisième se trouvent à des distances f_1, f_2 de la ligne droite A_0A_3 qui joint les deux extrêmes. Nous nommerons enfin :

b l'ouverture commune des travées;

$EI = \varepsilon$ le moment de flexibilité de la section transversale, supposée constante sur toute la longueur de la poutre;

I le moment d'inertie de cette section, h sa hauteur mesurée perpendiculairement à l'axe de flexion;

X_1, X_2 les moments fléchissants aux points A_1, A_2.

L'équation (9) du n° 6, appliquée successivement aux deux couples de travées A_0A_1, A_1A_2 d'une part, A_1A_2, A_2A_3 d'autre part, donne

$$4X_1 + X_2 = \frac{1}{2}pb^2 + \frac{6\varepsilon}{b^2}(-2f_1 + f_2),$$

$$X_1 + 4X_2 = \frac{1}{2}pb^2 + \frac{6\varepsilon}{b^2}(f_1 - 2f_2);$$

de là résultent les valeurs

$$X_1 = \frac{1}{10}pb^2 + \frac{6\varepsilon}{5b^2}(2f_2 - 3f_1),$$

$$X_2 = \frac{1}{10}pb^2 + \frac{6\varepsilon}{5b^2}(2f_1 - 3f_2).$$

Imaginons maintenant que les accidents de construction ou les fautes commises dans le nivellement aient eu pour conséquence de faire

$$f_1 = \frac{pb^4}{60\varepsilon}, \quad f_2 = -\frac{pb^4}{60\varepsilon};$$

les deux dernières équations font voir alors que X_1 s'annule, que X_2 prend une valeur double de celle qu'il aurait pour $f_1 = f_2 = 0$, et que par conséquent la loi des moments de flexion éprouve un bouleversement complet : notamment, la limite supérieure de ces moments devient $\frac{1}{5}pb^2$ au lieu de $\frac{1}{10}pb^2$.

Ces grandeurs que nous attribuons à f_1 et f_2 ont-elles quelque chose d'inusité et pratiquement peu réalisable? Non, en aucune façon, car elles sont comparables aux flèches que les travées prennent sous la charge, et ne doivent pas dépasser quelques centimètres, même avec d'assez grandes portées. Afin de le montrer en continuant notre exemple, supposons que le constructeur, comptant sur la nullité de f_1 et de f_2, ait pris $\frac{1}{10}pb^2$ pour valeur du moment fléchissant maximum; la section transversale ayant une forme quelconque symétrique relativement à l'axe de flexion, aura dû être déterminée de manière qu'on ait

$$\frac{0,1\,pb^2h}{2I} = R,$$

relation dans laquelle R désigne le plus grand effort par unité de surface auquel on veut soumettre les fibres. L'usage étant de prendre h entre $\frac{b}{10}$ et $\frac{b}{15}$ pour les poutres en tôle dont la section a la forme du double T, nous ferons $h = 0{,}08b$; nous ferons $R = 3\,000\,000$, ou seulement 3 kilogrammes par millimètre carré, afin de réserver la part des charges accidentelles dont on aurait à tenir compte dans un calcul plus complet. La dernière équation devient alors

$$\frac{pb^3}{I} = \frac{3}{4}\cdot 10^9,$$

ou, si l'on multiplie les deux membres par $\frac{b}{60E}$ et qu'on suppose $E = 2.10^{10}$,

$$\frac{pb^4}{60EI} = \frac{pb^4}{60\varepsilon} = \frac{b}{1600}.$$

La valeur ci-dessus attribuée à f_1 et à $-f_2$ serait $\frac{1}{1600}$ de la portée, c'est-à-dire $0^m,025$ avec une portée de 40 mètres.

Le sens général du résultat auquel nous arrivons ici est de nature à fixer, sous plusieurs points de vue, l'attention des ingénieurs. D'abord il importe essentiellement pour la vérité des calculs de résistance, soit qu'on les exécute par nos méthodes, soit qu'on préfère les méthodes actuellement en usage, que le polygone des appuis fictifs soit inscrit aussi exactement que possible dans la fibre moyenne primitive, quand on les place l'un et l'autre de manière à faire coïncider leurs extrémités homologues. Le constructeur ne saurait donc prendre des précautions trop minutieuses pour que cette condition se trouve remplie, non pas précisément à l'instant de la pose, mais après la production complète de tous les tassements, quand le système est parvenu à son équilibre définitif.

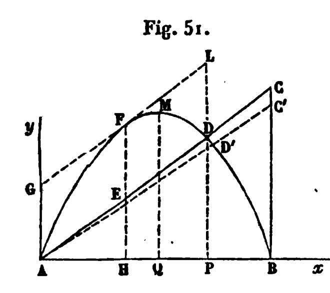
Mais ce n'est pas tout. Puisqu'il faut tant de précautions et de soins pour réaliser tout ce que suppose le calcul préalable des dimensions de la poutre, on peut se demander si pratiquement il arrivera que ces précautions seront toujours bien prises; si les tassements des supports, pouvant se produire à la longue, et échapper à une surveillance imparfaite, ne viendront pas en détruire l'effet dans beaucoup de cas. Cette éventualité a semblé suffisante à un ingénieur aussi distingué comme constructeur que comme savant, pour lui faire émettre l'opinion que les poutres à travées solidaires devraient être proscrites, et qu'il conviendrait de s'en tenir aux poutres à deux appuis simples, dans lesquelles aucun doute ne peut exister sur l'intensité des moments de flexion en chaque point, malgré les dérangements probables des appuis. Toutefois l'opinion contraire a jusqu'à présent prévalu : et, en attendant les leçons que l'expérience nous fournira sans doute, il ne nous appartient pas de trancher le différend.

63. *Disposition propre à rendre minimum le moment fléchissant moyen, sous une charge uniforme.* — Une poutre droite chargée uniformément à raison de p kilogrammes par mètre linéaire repose sur $n+1$ points d'appui : on demande de dis-

poser ces points, tant sous le rapport de l'écartement que sous celui du nivellement, de manière que le moment fléchissant moyen sur la longueur entière de la poutre soit un minimum, cette longueur entière devant d'ailleurs rester invariable.

Pour calculer le moment fléchissant moyen dont il est question dans l'énoncé, imaginons une courbe dont les abscisses seraient comptées suivant la fibre moyenne, et dont les ordonnées seraient, en chaque point de cette fibre, le moment fléchissant qui s'y produit; l'aire totale comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses, tant au-dessous qu'au-dessus, en la prenant partout positivement, sera, en vertu de sa définition même, le produit du moment fléchissant moyen par la longueur entière entre les appuis extrêmes. Rendre minimum le moment moyen, c'est donc aussi rendre minima l'aire dont on vient de parler. La solution exige que nous passions par quelques propositions intermédiaires.

Fig. 51.



I. Soit A (*fig.* 51) une extrémité de la poutre, et AB une travée de rive, de longueur b; construisons la parabole AMB, dont l'équation serait, relativement aux axes Ax, Ay,

$$(4)\qquad y = \frac{1}{2}px(b-x);$$

élevons en B une ordonnée $\overline{BC}$ égale au moment de flexion en ce point, et joignons AC. Suivant la formule (4) du n° 1, le moment de flexion en un point quelconque de la travée sera la portion d'ordonnée comprise entre la parabole et la droite BC, et le moment moyen, calculé pour cette travée toute seule, serait proportionnel à la somme des aires

$$\text{AEDF} + \text{DBC}.$$

Cherchons la condition qui rend cette somme un minimum, lorsque $\overline{BC}$ varie seul et que la longueur $\overline{AB}$ reste constante.

Si nous faisons varier $\overline{BC}$ d'une quantité infiniment pe-

tite $\overline{CC'}$, la somme des aires variera de la quantité correspondante ADD' — DCC'D' : donc il faut avoir pour le minimum

$$ADD' = DCC'D',$$

ou bien

$$ADD' = \frac{1}{2} ACC'.$$

Or on a, en nommant $d\theta$ l'angle infiniment petit CAC',

$$ADD' = \frac{1}{2} \overline{AD}^2 . d\theta, \quad ACC' = \frac{1}{2} \overline{AC}^2 . d\theta;$$

donc

$$\overline{AD}^2 = \frac{1}{2} \overline{AC}^2,$$

et par suite

$$\overline{AP}^2 = \frac{1}{2} \overline{AB}^2 = \frac{1}{2} b^2,$$

$$\overline{AP} = b \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Cela permet de calculer sans peine la valeur minimante de $\overline{BC}$. L'équation (4) donne en effet, quand on substitue $x = \overline{AP} = b \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$\overline{PD} = \frac{1}{2} p b^2 \sqrt{\frac{1}{2}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right);$$

d'un autre côté, la considération des triangles semblables APD, ACB fournit la relation

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}:$$

donc

$$\overline{BC} = \overline{PD}\sqrt{2} = \frac{1}{2} p b^2 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Il est intéressant de connaître la valeur de l'aire minima totale AEDF + DBC. Pour la calculer, menons la tangente GF parallèle à AD, et le diamètre conjugué FH : l'équation de la parabole étant $y = \frac{1}{2} px^2$, quand on prend pour axe des x la tangente au sommet et que l'axe des y coïncide avec l'axe de la courbe, deviendra

$$y = \frac{1}{2} px^2 \sin^2 \mathrm{GFE}$$

pour les axes obliques GF, FH; donc

$$\overline{\mathrm{AG}} = \overline{\mathrm{EF}} = \frac{1}{2} p . \overline{\mathrm{AE}}^2 . \sin^2 \mathrm{GFE} = \frac{1}{2} p . \overline{\mathrm{AH}}^2,$$

ou, attendu que E est le milieu de AD et par conséquent H le milieu de AP,

$$\overline{\mathrm{EF}} = \frac{1}{8} p . \overline{\mathrm{AP}}^2 = \frac{1}{16} pb^2.$$

De là il résulte que l'aire AEDF, égale aux $\frac{2}{3}$ du parallélogramme AGLD, a pour mesure

$$\frac{2}{3} . \overline{\mathrm{EF}} . \overline{\mathrm{AP}} = \frac{1}{24} pb^2 . b \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24\sqrt{2}} pb^3.$$

Quant à la seconde partie DBC de l'aire cherchée, on posera

$$\begin{aligned} \mathrm{DBC} &= \mathrm{ACB} + \mathrm{AEDF} - \mathrm{AQBM} \\ &= \frac{1}{2} b . \overline{\mathrm{CB}} + \frac{1}{24\sqrt{2}} pb^3 - \frac{2}{3} b . \overline{\mathrm{MQ}}; \end{aligned}$$

or, $\overline{\mathrm{CB}}$ est connu, et $\overline{\mathrm{MQ}}$ se calcule par l'équation (4) qui donne

$$\overline{\mathrm{MQ}} = \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{2} b = \frac{1}{8} pb^2 :$$

substituant dans l'expression précédente, il vient

$$\mathrm{DBC} = \frac{1}{2} pb^3 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{24\sqrt{2}} pb^3 - \frac{1}{12} pb^3$$
$$= \frac{1}{2} pb^3 \left(1 - \frac{5}{4\sqrt{2}}\right),$$

et par suite

$$\mathrm{AEDF} + \mathrm{DBC} = \frac{1}{6} pb^3 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

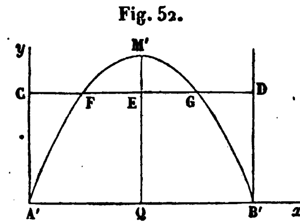
Le rapport de cette aire à celle de la parabole AMB, qui représenterait les moments si la travée AB n'avait en B aucune liaison avec le reste de la poutre, est

$$\frac{\frac{1}{6} pb^3 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{12} pb^3}, \quad \text{soit} \quad 2 - \sqrt{2} = 0,58578\ldots;$$

il donne la mesure de l'avantage maximum que peut procurer la solidarité, dans une travée extrême.

II. Soit maintenant A'B' (*fig.* 52) une travée quelconque (mais non de rive), de longueur c; traçons encore la parabole A'M'B' ayant pour équation

Fig. 52.



$$y = \frac{1}{2} px(c - x),$$

et portons en A' et B' les ordonnées $\overline{\mathrm{A'C}}$, $\overline{\mathrm{B'D}}$ égales aux moments de flexion correspondants. Le moment fléchissant moyen dans la travée A'B' sera proportionnel à l'aire comprise entre la parabole et la droite CD, c'est-à-dire à

$$\mathrm{CFA'} + \mathrm{FEGM'} + \mathrm{GDB'},$$

et l'on peut alors se demander quelles valeurs de $\overline{\mathrm{A'C}}$, $\overline{\mathrm{B'D}}$ rendront cette aire un minimum.

Pour les obtenir il suffira de prendre

$$\overline{\mathrm{M'E}} = \frac{1}{4}\overline{\mathrm{M'Q}} = \frac{1}{32}pc^2,$$

et de mener par le point E ainsi obtenu la parallèle CED à l'axe des x. En effet, les distances $\overline{\mathrm{EG}}$ et $\overline{\mathrm{QB'}}$ étant proportionnelles à $\sqrt{\overline{\mathrm{M'E}}}$ et $\sqrt{\overline{\mathrm{M'Q}}}$, on aura

$$\overline{\mathrm{EG}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{QB'}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{ED}},$$

c'est-à-dire

$$\overline{\mathrm{EG}} = \overline{\mathrm{GD}}, \quad \text{et, par symétrie,} \quad \overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{FC}}:$$

donc, si l'on imprime à la droite CD un mouvement infiniment petit, soit de translation, soit de rotation autour du point E, les petites surfaces ajoutées à l'aire ci-dessus indiquée seront égales à celles que l'on retranchera; par suite il en sera de même dans un mouvement élémentaire quelconque, nécessairement réductible aux deux précédents. Donc la différentielle de l'aire, correspondant au déplacement en question, sera nulle, ce qui constitue le caractère du minimum. Les valeurs de $\overline{\mathrm{A'C}}$ et $\overline{\mathrm{B'D}}$ qui le produisent sont donc

$$\overline{\mathrm{A'C}} = \overline{\mathrm{B'D}} = \frac{3}{4}\overline{\mathrm{M'Q}} = \frac{3}{32}pc^2.$$

L'aire A'QB'M' est, comme on sait, $\frac{1}{12}pc^3$; des résultats qu'on vient d'établir on déduit

$$\mathrm{FEGM'} = \frac{2}{3}\cdot\overline{\mathrm{FG}}.\overline{\mathrm{EM'}} = \frac{1}{3}c\cdot\frac{1}{32}pc^2 = \frac{1}{96}pc^3,$$

$$\mathrm{A'CDB'} = \frac{3}{32}pc^3:$$

donc

$$\mathrm{CFA'} + \mathrm{FEGM'} + \mathrm{GDB'} = \mathrm{A'CDB'} + 2.\mathrm{FEGM'} - \mathrm{A'QB'M'}$$
$$= \frac{3}{32}pc^3 + \frac{1}{48}pc^3 - \frac{1}{12}pc^3 = \frac{1}{32}pc^3.$$

Le rapport entre l'aire minima et celle de la parabole A'B'M' est $\frac{12}{32}$, soit $\frac{3}{8}$; c'est le nombre qui mesure l'avantage maximum de la solidarité, dans une travée intermédiaire.

III. Soit maintenant une poutre à $n+1$ appuis

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots,\ A_{n-1},\ A_n;$$

nommons

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n$$

les longueurs des n travées, et

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ldots,\ X_{n-1}$$

les moments fléchissants dans les sections qui répondent aux $n-1$ appuis intermédiaires. Ayant porté ces moments en ordonnées au-dessus des points correspondants, construisons la ligne brisée

$$A_0X_1X_2X_3\ldots X_{n-1}A_n,$$

qui joint leurs extrémités; construisons aussi, dans chaque travée, la parabole analogue à AMB ou A'M'B' (*fig.* 51 et 52). Nommons S l'aire totale comprise entre la ligne brisée et les paraboles, laquelle aire divisée par la longeur constante de la poutre nous donnerait le moment fléchissant moyen : il s'agit de rendre S minimum en disposant des longueurs $a_1, a_2, a_3,\ldots,$ sans changer leur somme, et des moments particuliers X_1, X_2, $X_3,\ldots.$

D'après ce qu'on vient de voir, si d'abord nous laissons les ouvertures des travées constantes, l'aire partielle relative à chacune d'elles ne pourra descendre au-dessous d'un certain minimum qne nous connaissons, et par suite S ne pourra descendre au-dessous de la somme de ces minima; donc

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} S > {} & \frac{1}{6}pa_1^3\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{32}pa_2^3+\frac{1}{32}pa_3^3 \\ & +\frac{1}{32}pa_4^3+\ldots+\frac{1}{32}pa_{n-1}^3+\frac{1}{6}pa_n^3\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}\right.$$

En général, les ouvertures des travées étant quelconques, les minima partiels dont nous venons d'écrire la somme ne seront pas réalisables : en effet, pour réaliser le minimum

$$\frac{1}{6}pa_1^2\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

dans la travée A_0A_1, il faudrait prendre

$$X_1=\frac{1}{2}pa_1^2\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

et, pour réaliser le minimum $\frac{1}{32}pa_2^2$ dans la travée A_1A_2, on devrait avoir

$$X_1=X_2=\frac{3}{32}pa_2^2,$$

valeur généralement différente. Il faudrait donc pouvoir attribuer deux valeurs différentes à la même quantité, ce qui est impossible. De même, la condition pour obtenir le minimum partiel $\frac{1}{32}pa_3^2$ est de poser

$$X_2=X_3=\frac{3}{32}pa_3^2;$$

pour le minimum $\frac{1}{32}pa_4^2$, de poser

$$X_3=X_4=\frac{3}{32}pa_4^2,$$

et ainsi de suite. On voit que la supposition d'ouvertures quelconques rendrait impossible la réalisation de chaque minimum partiel, en conduisant à deux valeurs différentes pour chacun des moments X_1, X_2, X_3, ..., X_{n-1}.

Mais nous pouvons faire disparaître cette impossibilité en choisissant les ouvertures, ou plutôt leurs rapports mutuels, de manière que ces doubles valeurs deviennent égales deux

à deux. Il suffit pour cela qu'on ait

$$(6)\quad \begin{cases} a_1^2\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{16}a_2^2, \\ a_2^2=a_3^2=a_4^2=\ldots=a_{n-1}^2, \\ a_n^2\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{16}a_{n-1}^2, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6\ bis)\quad \begin{cases} \frac{a_2}{a_1}=\frac{a_{n-1}}{a_n}=4\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}=1{,}2498388564\ldots, \\ a_2=a_3=a_4=\ldots=a_{n-1}. \end{cases}$$

Dans ce cas on aurait le droit d'adopter les valeurs, toutes égales, qui viennent d'être mentionnées, pour les moments X_1, X_2, X_3,...; et, si on les adoptait effectivement, l'inégalité (5) se changerait en égalité.

Or il arrive en outre, ce qui est fort remarquable, que les rapports (6), établis entre les diverses ouvertures, sont précisément ceux qui rendent minimum le second membre de l'inégalité (5) considéré comme fonction de a_1, a_2, a_3,..., sous la condition d'avoir

$$a_1+a_2+a_3+\ldots=\text{const.}$$

Nommons en effet S′ cette fonction; nous aurons

$$dS'=\frac{1}{2}pa_1^2\,da_1\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{3}{32}pa_2^2\,da_2+\frac{3}{32}pa_3^2\,da_3+\ldots$$
$$+\frac{1}{2}pa_n^2\,da_n\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

ce qu'on peut écrire, si les conditions (6) sont satisfaites,

$$dS'=\frac{3}{32}pa_2^2\,(da_1+da_2+da_3+\ldots+da_n),$$

c'est-à-dire $dS'=0$, puisque la somme des ouvertures ne varie pas. Les conditions (6) ou (6 *bis*) expriment donc bien le

minimum de la fonction S'; par conséquent elles expriment aussi celui de S, toujours plus grande que S', et lui devenant égale seulement quand ces conditions sont satisfaites.

En résumé, si 2 L désigne la longueur totale de la poutre, n le nombre des travées, on voit qu'il faut, pour rendre minimum le moment fléchissant moyen, déterminer l'ouverture b des travées de rive, par l'équation

$$2b + 4(n-2)b\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = 2L,$$

qui donne

$$b = \frac{L}{1 + 2(n-2)\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}}$$

soit plus simplement, en remplaçant le quadruple du radical par sa valeur très-approchée 1,25 ou $\frac{5}{4}$,

$$b = \frac{L}{1+\frac{5}{8}(n-2)} = \frac{8L}{5n-2};$$

prendre l'ouverture c de chaque travée intermédiaire égale à $4b\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$, ou approximativement

$$c = \frac{5}{4}b = \frac{10L}{5n-2} = \frac{2L}{n-0,4};$$

enfin, s'arranger pour que le moment sur un point d'appui quelconque ait pour valeur $\frac{3}{32}pc^2$. Il nous reste à dire comment cette dernière condition pourra être pratiquement réalisée.

IV. Nommons en général y_k la quantité dont l'appui A_k se trouve au-dessous d'une ligne superposable à la fibre moyenne primitive et joignant les appuis extrêmes A_0, A_n; la longueur d'une travée de rive étant en outre désignée par b, et celle

d'une travée intermédiaire par $b\delta$, nous appliquerons l'équation (9) du n° 6 à tous les groupes de deux travées consécutives, ce qui nous donnera :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta}[-y_1(1+\delta)+y_2] = 2X_1(1+\delta)+X_2\delta - \frac{1}{4}pb^2(1+\delta^3),\\ &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta^2}(y_1-2y_2+y_3) = X_1+4X_2+X_3-\frac{1}{2}pb^2\delta^2,\\ &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta^2}(y_2-2y_3+y_4) = X_2+4X_3+X_4-\frac{1}{2}pb^2\delta^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta^2}(y_{n-3}-2y_{n-2}+y_{n-1}) = X_{n-3}+4X_{n-2}+X_{n-1} - \frac{1}{2}pb^2\delta^2,\\ &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta}[y_{n-2}-y_{n-1}(1+\delta)] = X_{n-2}\delta+2X_{n-1}(1+\delta) - \frac{1}{4}pb^2(1+\delta^3), \end{aligned} \right.$$

ou, en remplaçant $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n-1}$ par $\frac{3}{32}pb^2\delta^2$,

$$(7\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta}[-y_1(1+\delta)+y_2] = \frac{1}{32}pb^2(\delta^3+6\delta^2-8),\\ &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta^2}(y_1-2y_2+y_3) = \frac{1}{16}pb^2\delta^2,\\ &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta^2}(y_2-2y_3+y_4) = \frac{1}{16}pb^2\delta^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta^2}(y_{n-3}-2y_{n-2}+y_{n-1}) = \frac{1}{16}pb^2\delta^2,\\ &\frac{6\varepsilon}{b^2\delta}[y_{n-2}-y_{n-1}(1+\delta)] = \frac{1}{32}pb^2(\delta^3+6\delta^2-8). \end{aligned} \right.$$

Les $(n-1)$ équations précédentes déterminent les valeurs qu'on doit donner aux ordonnées $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$. Pour les résoudre commodément, on remarquera que trois de ces va-

leurs, ayant pour indices trois nombres entiers consécutifs, satisfont à la relation

$$y_k - 2y_{k+1} + y_{k+2} = \frac{1}{96\varepsilon} p b^4 \delta^4,$$

que l'on peut écrire aussi

$$(y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = \Delta^2 y_k = \frac{1}{96\varepsilon} p b^4 \delta^4.$$

De là résulte, en nommant A et B deux constantes, et f le facteur $\frac{1}{96\varepsilon} p b^4 \delta^4$,

(8) $$y_k = f\left(\frac{1}{2}k^2 + Ak + B\right).$$

Cette expression vérifie, quels que soient A et B, les $n - 3$ équations intermédiaires du groupe (7 *bis*), et l'on peut ensuite disposer des deux constantes de manière à vérifier aussi les deux extrêmes. C'est ce que nous allons faire : mais nous remarquerons d'abord qu'en vertu de la symétrie on doit avoir évidemment

$$y_k = y_{n-k},$$

ou, d'après l'équation (8),

$$\frac{1}{2}k^2 + Ak = \frac{1}{2}(n-k)^2 + A(n-k) :$$

de cette relation nous tirons

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-k)^2 - k^2}{2k - n} = -\frac{n}{2},$$

et par suite

$$y_k = -\frac{1}{2} f[k(n-k) - 2B].$$

Si nous adoptons cette dernière expression, nous n'aurons plus qu'à choisir B de façon à vérifier l'une des équations extrêmes du groupe (7 *bis*), la première par exemple : cela

nous fournira la relation

$$-\delta^2[n(1-\delta)-3+\delta+2B\delta]=\delta^3+6\delta^2-8,$$

d'où l'on déduit

$$2B=\frac{8-6\delta^2+2\delta^3-\delta^4+n\delta^2(\delta-1)}{\delta^4},$$

ou bien, eu égard à la valeur $4\sqrt{\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}$ de δ,

$$2B=0,0377+0,1999n.$$

Donc enfin

$$(9)\qquad y_k=-\frac{1}{2}f[k(n-k)-0,0377-0,1999n].$$

La quantité comprise entre crochets, dans le second membre de la formule (9), varie avec k; mais sa plus petite valeur (qui répond à l'une des limites $k=1$ ou $k=n-1$) est

$$0,8001n-1,0377.$$

Donc cette quantité reste toujours positive; donc, f l'étant aussi, toutes les ordonnées y_k sont négatives, c'est-à-dire qu'il faut les compter au-dessus de l'axe des abscisses.

Le facteur $f=\frac{1}{96\varepsilon}pb^4\delta^4$ n'est autre chose que les 0,8 de la flèche qui serait prise isolément par chaque travée intermédiaire, sous la charge uniformément répartie $pb\delta$, si l'on détruisait la solidarité entre les travées, et que la poutre fût interrompue sur chaque pile.

Le maximum en grandeur absolue de y_k, lorsque k varie, répondrait à $k=\frac{n}{2}$, et aurait pour valeur

$$\frac{1}{2}f(0,25n^2-0,1999n-0,0377):$$

il existera sur l'appui central, quand n sera pair, ce qui per-

mettra de faire $k = \frac{n}{2}$. Mais si n est impair, on ne pourra plus adopter que les valeurs $k = \frac{n \pm 1}{2}$, afin de s'en rapprocher le plus possible, et l'on obtiendra pour limite supérieure des y_k le produit

$$\frac{1}{2} f (0,25 n^2 - 0,1999 n - 0,2877),$$

ce qui diffère relativement peu du résultat précédent, dès que n a une grandeur notable.

Il est facile de trouver une courbe continue passant par tous les points d'appui intermédiaires. Afin de la définir, nous prendrons pour axe des y la verticale descendante qui part du milieu de la poutre, et pour axe des x l'horizontale menée à la distance

$$\frac{1}{2} f (0,25 n^2 - 0,1999 n - 0,0377)$$

au-dessus de l'axe relativement auquel nous comptions y_1, y_2, $y_3, \ldots, y_{n-1}$. Nous supposerons, pour éviter toute équivoque, la fibre moyenne rigoureusement droite, dans son état primitif. L'ordonnée de l'appui A_k est, avec ces nouveaux axes,

$$y = \frac{1}{2} f [0,25 n^2 - k(n - k)] = \frac{1}{2} f \left(\frac{n}{2} - k\right)^2;$$

son abscisse sera

$$x = b\delta \left(\frac{n}{2} - k\right),$$

comme on le vérifie aisément en retranchant la distance A_0A_k de la demi-longueur de la poutre. L'élimination de k entre ces deux équations donne celle de la courbe, savoir :

$$y = \frac{1}{2} f \frac{x^2}{b^2\delta^2},$$

ce qui est l'équation d'une parabole à axe vertical, ayant $2b\delta$ de corde sur $\frac{1}{2} f$ de flèche, et tournant sa concavité vers le

bas : on voit donc que tous les appuis appartiennent à une même parabole quand la fibre moyenne est primitivement droite. Inversement on pourrait faire droite la ligne des appuis, en adoptant une fibre moyenne parabolique; et généralement on pourrait adopter toutes les combinaisons qui maintiendraient le même écart relatif entre ces deux lignes, pourvu, bien entendu, que la fibre moyenne restât toujours sensiblement droite.

Il est à remarquer que les ordonnées des appuis extrêmes ne rentrent pas rigoureusement dans la formule précédente ; celle-ci, en faisant

$$x = b\delta\left(\frac{n}{2} - 1\right) + b,$$

et tenant compte de la valeur numérique de δ, donnerait en effet

$$y = \frac{1}{2}f(0,25n^2 - 0,1999n + 0,04),$$

tandis qu'on devrait prendre en réalité

$$y = \frac{1}{2}f(0,25n^2 - 0,1999n - 0,0377).$$

On voit qu'il existe entre ces ordonnées une différence de $0,0777 \cdot \frac{1}{2}f$, laquelle a une importance relative d'autant plus faible que n est plus grand.

V. Quand on dispose la poutre de manière à réduire autant que possible le moment fléchissant moyen, il est facile d'avoir la valeur de cette moyenne qu'on a rendue minimum. L'aire totale de la courbe représentative des moments est, en effet,

$$S_1 = \frac{1}{3}pb^3\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \frac{n-2}{32}pb^3\delta^3;$$

or on a, suivant l'égalité qui définit le nombre δ,

$$\frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\delta^2}{16};$$

donc

$$S_1 = \frac{1}{32} p b^2 \delta^2 [2b + (n-2) b\delta],$$

ce qui donne pour la moyenne cherchée $\frac{1}{32} p b^2 \delta^2$, car l'expression entre crochets n'est autre chose que la longueur de la poutre. Enfin, si l'on remplace $b\delta$ par sa valeur approximative $\frac{2L}{n-0,4}$, indiquée plus haut, il viendra pour expression de cette moyenne minimum, que nous appellerons M,

$$M = \frac{pL^2}{8(n-0,4)^2}.$$

Il y aurait sans doute un certain intérêt à comparer M avec les moyennes analogues M′ qui se produisent dans diverses circonstances. Si la poutre est formée de n travées indépendantes ayant pour longueur $\frac{2L}{n}$, le moment moyen est

$$M' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} p \left(\frac{2L}{n}\right)^2 = \frac{pL^2}{3n^2};$$

donc on a

$$\frac{M}{M'} = \frac{3}{8} \left(\frac{n}{n-0,4}\right)^2;$$

formule qui conduit aux résultats indiqués ci-dessous :

$n =$	2,	3,	4,	5,	6,	7,
$\frac{M}{M'} =$	0,586,	0,499,	0,463,	0,444,	0,430,	0,422,
$n =$	8,	9,	10,	11,	12,...,	∞.
$\frac{M}{M'} =$	0,416,	0,411,	0,407,	0,404,	0,401,...,	0,375.

Si la poutre est composée de trois travées solidaires, et que le polygone des appuis reste invariable pendant la déformation de la pièce (nº 62), on trouve à la page 188 de notre *Cours de Résistance des Matériaux*, un tableau des valeurs que prend M′, suivant la grandeur du rapport δ entre la longueur de la

travée centrale et celle d'une travée extrême : d'ailleurs M devient $\frac{1}{8.(2,6)^2} = 0,01849$, pour $n = 3$. On peut donc dresser le tableau suivant :

RAPPORT δ.	$\frac{M'}{pL^2}$	$\frac{M}{M'}$	RAPPORT δ.	$\frac{M'}{pL^2}$	$\frac{M}{M'}$
0,00	0,04948	0,374	1,25	0,01883	0,982
0,90	0,02162	0,855	1,30	0,01888	0,979
1,00	0,02009	0,920	2,00	0,02634	0,702
1,10	0,01923	0,962	∞	0,03207	0,577
1,20	0,01886	0,980			

Les moments M′ et M s'approchent beaucoup de l'égalité, lorsque δ a la même valeur (1,25) dans les deux poutres auxquelles se rapportent ces moments : le second n'est alors inférieur au premier que de 1,8 pour 100. Cela montre que dans les poutres à trois travées où l'on a fait $\delta = 1,25$, il y a peu de bénéfice possible à ne pas prendre le polygone des appuis inscriptible dans la fibre moyenne primitive.

La longueur des calculs nous a empêché de répéter la même comparaison pour les poutres ayant plus de trois travées.

64. *Des moyens par lesquels on peut rendre égaux les moments de flexion sur tous les points d'appui d'une poutre soumise à une charge uniforme.* — On a vu (n° 36) que cette égalité se produit tout naturellement, avec des appuis situés au même niveau relativement à la fibre moyenne dans l'état primitif, quand le rapport δ prend la valeur particulière

$$\delta = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,22474\ldots.$$

On a vu aussi (n° 63) qu'on pouvait rendre tous les moments X_k égaux à $\frac{3}{32}pb^2\delta^2$ en donnant aux points d'appui des ordonnées convenablement choisies; il faudrait répéter des calculs analogues dans le cas où la valeur commune des X_k serait une

quantité X′ différente de $\frac{3}{32}pb^2\delta^2$. Il n'y aurait qu'à modifier la constante f, qui, au lieu de $\frac{1}{96\varepsilon}pb^4\delta^4$, deviendrait

$$\frac{b^2\delta^2}{\varepsilon}\left(X' - \frac{1}{12}pb^2\delta^2\right),$$

et à déterminer B par le procédé que nous avons employé, mais en tenant compte du changement de f.

Parmi toutes les valeurs de X′ qu'on peut choisir, nous distinguerons la valeur $\frac{1}{12}pb^2\delta^2$, premièrement parce qu'elle est celle qui répond à l'encastrement spontané de la poutre sur les appuis intermédiaires, par le seul effet de la liaison des travées; en second lieu parce qu'elle donne $f=0$, ce qui simplifie beaucoup la recherche des ordonnées y_1, y_2, y_3,... des points d'appui. En effet, les $n-3$ équations intermédiaires du groupe (7) auront pour second membre 0, et pourront se remplacer par l'équation unique

$$\Delta^2 y_k = 0,$$

d'où résulte

$$y_k = \text{const.},$$

car si, pour adopter la forme la plus générale satisfaisant à $\Delta^2 y_k = 0$, on joignait à la constante un terme du premier degré en k, il deviendrait impossible de vérifier la condition

$$y_k = y_{n-k}.$$

La valeur commune des y_k se déduira ensuite de l'une des équations extrêmes du groupe (7), de la première, par exemple, qui en faisant $y_1 = y_2$, $X_1 = X_2 = \frac{1}{12}pb^2\delta^2$, donne

$$y_1 = \frac{pb^4}{72\varepsilon}(3 - 2\delta^2).$$

On peut, dans cette équation, attribuer une valeur quelconque à δ : si l'on fait $\delta = \sqrt{\frac{3}{2}}$, on a $y_1 = 0$, ce qui con-

corde bien avec le résultat trouvé au n° 36 et rappelé ci-dessus; si l'on fait $\delta = 1$, on a

$$y_1 = \frac{pb^4}{72\varepsilon}.$$

En plaçant la ligne des appuis intermédiaires ou piles en dessous de celle des appuis extrêmes, à la distance qu'indique cette dernière équation, la poutre à travées égales se trouverait spontanément encastrée sur les piles, quand elle n'aurait, bien entendu, qu'à supporter une charge uniforme couvrant sa longueur entière. D'une manière générale, on parviendrait au même résultat quand δ différerait de l'unité, en adoptant pour y_1 la valeur précédente multipliée par $3 - 2\delta^2$.

M. Piarron de Mondésir a indiqué un autre moyen pour obtenir un moment de flexion toujours égal à $\frac{1}{12}pb^2$, sur tous les points d'appui d'une poutre à travées égales (*) : il consiste d'abord à prendre le polygone des appuis (n° 62) inscriptible dans la fibre moyenne primitive, c'est-à-dire à rendre nulles toutes les ordonnées y_i, puis à encastrer les deux bouts de la poutre. Afin de démontrer ce résultat, posons les équations qui déterminent les moments de flexion X_0, X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n sur les points d'appui : nous aurons, en appliquant la formule (10) du n° 6 à tous les groupes de deux travées consécutives, et tenant compte des données particulières de la question :

$$X_0 + 4X_1 + X_2 = \frac{1}{2}pb^2,$$

$$X_1 + 4X_2 + X_3 = \frac{1}{2}pb^2,$$

$$X_2 + 4X_3 + X_4 = \frac{1}{2}pb^2,$$

....

$$X_{n-2} + 4X_{n-1} + X_n = \frac{1}{2}pb^2.$$

L'équation (m) du n° 2, appliquée aux deux travées extrêmes,

(*) *Calcul des ponts métalliques à poutres droites et continues*, p. 56 et 57.

donne encore les deux relations

$$2X_0 + X_1 = \frac{1}{4} pb^2,$$

$$2X_n + X_{n-1} = \frac{1}{4} pb^2,$$

qu'on aurait pu, au besoin, déduire aussi de la formule (10) du n° 6, en supposant la poutre prolongée au delà de ses deux extrémités par des travées de longueur nulle. (Cette condition équivaut bien à l'encastrement des bouts, puisque chacun d'eux repose sur deux points d'appui confondus en un seul, ce qui assure l'invariabilité de direction des éléments extrêmes de la fibre moyenne.) Or, les équations précédentes sont en nombre suffisant pour déterminer tous les X_k, et l'on reconnaît aisément qu'elles sont vérifiées en prenant tous ces moments égaux à $\frac{1}{12} pb^2$. Donc la disposition indiquée par M. Piarron de Mondésir a effectivement pour conséquence de produire sur les appuis fixes qui limitent chaque travée un moment de flexion égal à $\frac{1}{12} pb^2$, et par conséquent toutes les travées se comportent, sous la charge permanente, comme si elles étaient encastrées.

65. *Disposition propre à rendre minimum le plus grand moment de flexion produit par une charge uniforme.* — Quand un poids uniformément réparti est placé sur la longueur entière de la poutre, le moment de flexion dans une travée quelconque s'exprime par une fonction entière et du second degré de l'abscisse, dont les valeurs extrêmes répondent : 1° aux deux limites de la travée; 2° au sommet de la parabole représentative de la fonction, lequel sommet tombe ordinairement dans ces limites. Toutes les valeurs extrêmes dont il s'agit étant prises en valeur absolue, on demande de disposer les points d'appui, tant sous le rapport de l'écartement que sous celui du nivellement, de manière à rendre minimum la plus grande d'entre elles, sous la condition de n'employer qu'un nombre donné d'appuis et de conserver invariable la longueur totale de la poutre.

Considérons d'abord successivement (comme au n° 63) une travée de rive et une travée intermédiaire quelconque, et résolvons la question pour l'une d'elles prise à part. S'il s'agit d'une travée de rive AB (*fig.* 51, p. 251), après avoir construit la parabole AMB, l'ordonnée $\overline{BC}$ et la droite AC, dont les définitions seraient les mêmes qu'au n° 63, on voit qu'il y a deux maxima des moments fléchissants de toute la travée, savoir $\overline{BC}$ et $\overline{EF}$, le point E devant être pris au milieu de $\overline{AD}$. Pour que le plus grand des deux soit minimum, il faut qu'ils soient égaux, car autrement on aurait un résultat plus favorable en faisant tourner la ligne AC autour de A, de manière à augmenter la plus faible des longueurs $\overline{BC}$, $\overline{EF}$, et à diminuer la plus forte. Cela détermine $\overline{BC}$. On a, en effet (n° 63),

$$\overline{EF} = \frac{1}{8} p . \overline{AP}^2,$$

et, par conséquent, l'égalité $\overline{BC} = \overline{EF}$ devient

$$(10) \qquad \overline{BC} = \frac{1}{8} p . \overline{AP}^2;$$

d'un autre côté, on a

$$\overline{BC} = \overline{PD} \cdot \frac{b}{\overline{AP}},$$

et comme, en vertu de l'équation de la parabole, $\overline{PD}$ est égal à $\frac{1}{2} p . \overline{AP} (b - \overline{AP})$, il vient

$$(11) \qquad \overline{BC} = \frac{1}{2} pb (b - \overline{AP}).$$

Éliminant $\overline{AP}$ entre les équations (10) et (11), et posant $z = \frac{\overline{BC}}{pb^2}$, nous trouvons

$$z = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{8z});$$

de là résulte

$$z^2 - 3z + \frac{1}{4} = 0,$$

et enfin

$$z = \frac{3-\sqrt{8}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2 = 0,085786\ldots.$$

Ainsi donc le moment de flexion sur le premier appui après la culée devrait être $0,085786\ldots pb^2$ pour remplir les conditions du problème dans une travée de rive considérée isolément.

Dans une travée intermédiaire, la même question se traite plus simplement encore. Soit en effet A′B′ (*fig.* 52, p. 254) cette travée; traçons la parabole A′M′B′ et la ligne droite CD suivant les mêmes définitions qu'au n° 63. Nous verrons apparaître alors trois maxima des moments de flexion dans l'étendue A′B′, savoir $\overline{A'C}$, $\overline{B'D}$, et l'ordonnée $\overline{M'E}$ menée par le milieu de la corde FG. On les rendra égaux en prenant

$$\overline{A'C} = \overline{B'D} = \frac{1}{16}pc^2,$$

car alors $\overline{M'E}$ coïncide avec l'axe de la parabole, et a pour valeur $\overline{M'Q}-\overline{QE}$ ou $\overline{M'Q}-\overline{A'C}$, ou encore $\frac{1}{8}pc^2 - \frac{1}{16}pc^2$, c'est-à-dire enfin $\frac{1}{16}pc^2$. C'est la moindre valeur qu'on puisse obtenir pour le plus grand des trois maximums; car l'un des trois, au moins, s'accroît lorsque l'on donne à CD, soit une translation, soit une rotation autour du point E. La condition du problème sera donc remplie dans toute travée intermédiaire en s'arrangeant pour avoir, sur les piles qui la terminent, un moment fléchissant égal à $\frac{1}{16}pc^2$.

Tous ces minima maximorum partiels, relatifs aux diverses travées, deviennent égaux entre eux quand on prend une même ouverture c pour toutes les travées intermédiaires, et que l'ouverture b des travées de rive satisfait à la relation

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2 b^2 = \frac{1}{16}c^2,$$

qui donne

$$\frac{c}{b} = \delta = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 4-\sqrt{8} = 1,17157\ldots.$$

Il sera possible alors de réaliser le minimum $\frac{1}{16}pc^2$ dans toutes les travées, en adoptant cette même valeur $\frac{1}{16}pc^2$ pour celle des moments sur les $n-1$ points d'appui intermédiaires. Or, on aura ainsi résolu le problème qu'on s'était posé; car, d'après ce qu'on vient de voir, on aurait un résultat moins favorable en modifiant seulement les moments de flexion sur les appuis, sans changer les ouvertures; d'autre part, si l'on changeait celles-ci en laissant leur somme invariable, l'une d'elles au moins augmenterait de longueur, et il y aurait aussi augmentation du plus petit maximum réalisable dans son étendue, puisque ce plus petit maximum varie proportionnellement au carré de la longueur; la limite inférieure $\frac{1}{16}pc^2$, précédemment obtenue, serait donc dépassée.

La connaissance du rapport δ détermine immédiatement b et c; on a en effet, n étant le nombre des travées,

$$2L = 2b + (n-2)b\delta,$$

et par suite

$$b = \frac{2L}{2+(n-2)\delta}, \quad c = \frac{2L\delta}{2+(n-2)\delta}.$$

L'espacement des appuis est donc maintenant connu; mais il reste à indiquer leur nivellement, et c'est à quoi l'on arrivera en exprimant que les moments sur ces appuis ont tous la valeur $\frac{1}{16}pc^2$ ou $\frac{1}{16}pb^2\delta^2$.

A cet effet, il faudra suivre la marche indiquée au n° 64, et dont un exemple développé se trouve au n° 63, art. IV. Sans entrer dans autant de détails, nous nous bornerons à dire que les constantes f et $2B$ prennent ici les valeurs

$$f = -\frac{pb^4\delta^4}{48\varepsilon},$$

$$2B = \frac{-\delta^4 + 2\delta^3 + 2\delta^2 - 4 + n\delta^3(\delta-1)}{\delta^4}$$

$$= 0{,}04105 + 0{,}146447\,n,$$

et que, par conséquent, l'ordonnée y_k d'un appui intermédiaire quelconque relativement à la fibre moyenne prise dans l'état primitif, est donnée par la formule

$$y_k = -\frac{1}{2} f[k(n-k) - 0,04105 - 0,146447\, n].$$

Les ordonnées extrêmes y_0, y_n, nulles toutes deux, ne rentrent pas dans cette formule. En poursuivant la discussion, il serait facile de reconnaître que toutes les ordonnées y_k sont positives, et que, dans le cas d'une fibre moyenne primitivement droite, leur lieu géométrique est une parabole à axe vertical, tournant sa concavité vers le haut. Son sommet se trouverait sur la verticale du milieu de la poutre, à la distance

$$-\frac{1}{2} f(0,25 n^2 - 0,04105 - 0,146447\, n)$$

au-dessous de la ligne joignant les points d'appui extrêmes.

On peut, comme au n° 63, calculer l'aire de la courbe des moments et en déduire le moment fléchissant moyen pour la poutre entière. Ce calcul nous a donné les résultats suivants :

Moment moyen.

Dans une travée extrême......	$0,039573\, pc^2$,
Dans une travée intermédiaire.	$0,038092\, pc^2$;

les coefficients 0,039573 et 0,038092 représentent respectivement les valeurs approximatives de $\frac{7}{48}\sqrt{2} - \frac{1}{6}$ et de $\frac{1}{24}\sqrt{2} - \frac{1}{48}$. On tire facilement de là l'expression de la moyenne générale M′ pour la poutre entière, en multipliant chaque moyenne partielle par la longueur de sa travée, et divisant la somme des produits par la longueur totale; on trouve ainsi

$$M' = \frac{pL^2}{12} \cdot \frac{(2\sqrt{2} - 1)n - (\sqrt{2} - 1)}{\left(n - 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3}$$

$$= 0,152369\, pL^2 \frac{n - 0,22654}{(n - 0,29289)^3}.$$

Cette moyenne est notablement supérieure au minimum M obtenu précédemment (nº 63) avec d'autres valeurs de δ et des ordonnées y_k; l'excès, variable et croissant avec n, est de 15 à 20 pour 100 pour les poutres de 3 à 12 travées. C'est là un sérieux inconvénient de la disposition que nous venons d'étudier, et un obstacle à son emploi pratique, sauf dans le cas où la poutre devrait recevoir une section constante; car alors le moment maximum serait le seul dont on aurait à tenir compte dans le calcul de cette section, et il y aurait intérêt à le diminuer autant que possible, sans se préoccuper de ce que deviennent les autres ainsi que leur moyenne générale.

Enfin nous énoncerons la remarque suivante, qui est un corollaire immédiat des résultats trouvés aux nºs 63 et 65 :

Dans une poutre à section constante, dont la longueur totale 2L *est subdivisée en n travées solidaires, si la charge est uniformément répartie sur cette longueur* 2L *à raison du poids p par unité linéaire, il est absolument impossible, quelque disposition qu'on imagine pour l'écartement et le nivellement des appuis,* 1° *de faire descendre le moment fléchissant moyen au-dessous de la limite* $\frac{pL^2}{8(n-0,4)^2}$; 2° *de faire descendre le moment fléchissant maximum au-dessous d'une autre limite égale à* $\frac{pL^2}{4(n-0,29289)^2}$.

TABLEAUX

DE

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

OBTENUS

PAR DIVERSES FORMULES DU CHAPITRE DEUXIÈME,

AVEC DES HYPOTHÈSES PARTICULIÈRES

SUR LE RAPPORT δ D'UNE TRAVÉE INTERMÉDIAIRE A UNE TRAVÉE EXTRÊME,

ET SUR LE NOMBRE TOTAL n DES TRAVÉES.

TABLEAU I. — Série des nombres u, jusqu'à u_{n-1} inclusivement.
(Voir le n° 34.)

VALEURS de l'indice m.	VALEURS DE u_m CORRESPONDANT À $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,25	1,3
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	$-4\frac{6}{7}$	$-4,5$	$-4\frac{2}{9}$	-4	$-3\frac{9}{11}$	$-3\frac{2}{3}$	$-3,6$	$-3\frac{7}{13}$
3	$18\frac{3}{7}$	17	$15\frac{8}{9}$	15	$14\frac{3}{11}$	$13\frac{2}{3}$	13,4	$13\frac{2}{13}$
4	$-68\frac{6}{7}$	$-63,5$	$-59\frac{1}{3}$	-56	$-53\frac{3}{11}$	-51	-50	$-49\frac{1}{13}$
5	257	237	$221\frac{4}{9}$	209	$198\frac{9}{11}$	$190\frac{1}{3}$	186,6	$183\frac{2}{13}$
6	$-959\frac{1}{7}$	$-884,5$	$-826\frac{4}{9}$	-780	-742	$-710\frac{1}{3}$	$-696,4$	$-683\frac{7}{13}$
7	$3579\frac{4}{7}$	3301	$3084\frac{1}{3}$	2911	$2769\frac{2}{11}$	2651	2599	2551
8	$-13359\frac{1}{7}$	$-12319,5$	$-11510\frac{8}{9}$	-10864	$-10334\frac{8}{11}$	$-9893\frac{2}{3}$	$-9699,6$	$-9520\frac{6}{13}$
9	49857	45977	$42959\frac{2}{9}$	40545	$38569\frac{8}{11}$	$36923\frac{2}{3}$	36199,4	$35530\frac{11}{13}$
10	$-186068\frac{6}{7}$	$-171588,5$	-160326	-151316	$-143944\frac{2}{11}$	-137801	-135098	$-132602\frac{12}{13}$
11	$694418\frac{3}{7}$	640377	$598344\frac{7}{9}$	564719	537207	$514280\frac{1}{3}$	504192,6	$494880\frac{11}{13}$
....	....	....	....	....	....	....	....	....

TABLEAU II. — Dernier nombre de la série u, ou u_n.
(Voir le n° 34.)

NOMBRE n des travées.	VALEURS DE u_n RÉPONDANT À δ =							
	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,25	1,3
3	$15\frac{57}{70}$	15,4	$15\frac{13}{90}$	15	$14\frac{103}{110}$	$14\frac{14}{15}$	14,95	$14\frac{127}{130}$
4	$-59\frac{9}{35}$	−57,6	$-56\frac{26}{45}$	−56	$-55\frac{41}{55}$	$-55\frac{11}{15}$	−55,80	$-55\frac{59}{65}$
5	$221\frac{3}{14}$	215	$211\frac{1}{6}$	209	$208\frac{1}{22}$	208	208,25	$208\frac{17}{26}$
6	$-825\frac{3}{5}$	−802,4	$-788\frac{4}{45}$	−780	$-776\frac{24}{55}$	$-776\frac{4}{15}$	−777,20	$-778\frac{46}{65}$
7	$3081\frac{13}{70}$	2994,6	$2941\frac{17}{90}$	2911	$2897\frac{7}{10}$	$2897\frac{1}{15}$	2900,55	$2906\frac{23}{130}$
8	$-11499\frac{1}{7}$	−11176	$-10976\frac{2}{3}$	−10864	$-10814\frac{4}{11}$	−10812	−10825	−10846
9	$42915\frac{27}{70}$	41709,4	$40965\frac{43}{90}$	40545	$40359\frac{83}{110}$	$40350\frac{14}{15}$	40399,45	$40477\frac{107}{130}$
10	$-160162\frac{2}{5}$	−155661,6	$-152885\frac{11}{45}$	−151316	$-150624\frac{36}{55}$	$-150591\frac{11}{15}$	−150772,80	$-151065\frac{19}{65}$
11	$597734\frac{3}{14}$	580937	$570575\frac{1}{2}$	564719	$562138\frac{19}{22}$	562016	562691,75	$563783\frac{9}{26}$
12	$-2230774\frac{16}{35}$	−2168086,4	$-2129416\frac{34}{45}$	−2107560	$-2097930\frac{4}{5}$	$-2097472\frac{4}{15}$	−2099994,20	$-2104068\frac{6}{65}$
....	....	....	....	....	....	....	....	....

TABLEAU III. — Série des nombres β, jusqu'à β_{n-2} inclusivement.
(Voir le n° 34.)

VALEURS de l'indice m.	VALEURS DE β_m POUR $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,25	1,3
0	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000
1	0,205 8824	0,222 2222	0,236 8421	0,250 0000	0,261 9048	0,272 7273	0,277 7778	0,282 6087
2	0,263 5659	0,264 7059	0,265 7343	0,266 6667	0,267 5159	0,268 2927	0,268 6567	0,269 0058
3	0,267 6349	0,267 7165	0,267 7903	0,267 8571	0,267 9181	0,267 9739	0,268 0000	0,268 0251
4	0,267 9266	0,267 9325	0,267 9378	0,267 9426	0,267 9470	0,267 9510	0,267 9528	0,267 9546
5	0,267 9476	0,267 9480	0,267 9484	0,267 9487	0,267 9490	0,267 9493	0,267 9495	0,267 9496
6	0,267 9491	0,267 9491	0,267 9491	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492
7	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492
8	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492	0,267 9492
....	....	....	....	....	....	....	....	....

TABLEAU IV. — Dernier nombre de la série β, ou β_{n-1}.

(Voir le n° 34.)

NOMBRE n des travées.	VALEURS DE β_{n-1} RÉPONDANT À δ =							
	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,25	1,3
3	0,307 1364	0,292 2078	0,278 7968	0,266 6667	0,255 6299	0,245 5357	0,240 8027	0,236 2609
4	0,310 9932	0,295 1389	0,280 8327	0,267 8571	0,256 0339	0,245 2153	0,240 1434	0,235 2779
5	0,311 2690	0,295 3488	0,280 9787	0,267 9426	0,256 0629	0,245 1923	0,240 0960	0,235 2074
6	0,311 2888	0,295 3639	0,280 9892	0,267 9487	0,256 0650	0,245 1907	0,240 0926	0,235 2023
7	0,311 2902	0,295 3650	0,280 9899	0,267 9492	0,256 0652	0,245 1905	0,240 0924	0,235 2019
8	0,311 2903	0,295 3651	0,280 9900	0,267 9492	0,256 0652	0,245 1905	0,240 0924	0,235 2019
9	0,311 2903	0,295 3651	0,280 9900	0,267 9492	0,256 0652	0,245 1905	0,240 0924	0,235 2019
……	………	………	………	………	………	………	………	………

TABLEAU V. — Moments X_m produits sur les points d'appui, par la charge permanente.

(Voir les n°s 42 et 43.)

Valeurs de l'indice m.		Valeurs du rapport $\frac{X_m}{pb^2}$ répondant à $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Trois travées.			
1	2	0,081890	0,085909	0,091968	0,100000
		Quatre travées.			
1	3	0,096025	0,098125	0,101828	0,107143
2	2	0,013238	0,030938	0,050336	0,071429
		Cinq travées.			
1	4	0,092469	0,095000	0,099268	0,105263
2	3	0,030506	0,045000	0,061146	0,078947
		Six travées.			
1	5	0,093438	0,095847	0,099960	0,105769
2	4	0,025804	0,041186	0,058226	0,076923
3	3	0,048348	0,059407	0,072137	0,086538
		Sept travées.			
1	6	0,093179	0,095621	0,099775	0,105634
2	5	0,027058	0,042205	0,059007	0,077465
3	4	0,043588	0,055559	0,069199	0,084507
		Huit travées.			
1	7	0,093249	0,095682	0,099824	0,105670
2	6	0,026722	0,041932	0,058797	0,077320
3	5	0,044865	0,056591	0,069986	0,085052
4	4	0,038817	0,051705	0,066257	0,082474

TABLEAU V. (Suite.)

VALEURS de l'indice *m*.		VALEURS DU RAPPORT $\frac{X_m}{pb^2}$ RÉPONDANT A $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Trois travées.			
1	2	0,109953	0,121786	0,128397	0,135466
		Quatre travées.			
1	3	0,114075	0,122632	0,127521	0,132816
2	2	0,094212	0,118684	0,131552	0,144842
		Cinq travées.			
1	4	0,112977	0,122404	0,127757	0,133537
2	3	0,098405	0,119519	0,130699	0,142293
		Six travées.			
1	5	0,113272	0,122465	0,127694	0,133345
2	4	0,097279	0,119296	0,130927	0,142973
3	3	0,102610	0,120352	0,129849	0,139764
		Sept travées.			
1	6	0,113193	0,122448	0,127711	0,133396
2	5	0,097581	0,119356	0,130866	0,142790
3	4	0,101484	0,120129	0,130077	0,140442
		Huit travées.			
1	7	0,113214	0,122453	0,127706	0,133382
2	6	0,097500	0,119340	0,130882	0,142839
3	5	0,101786	0,120189	0,130016	0,140260
4	4	0,100357	0,119906	0,130305	0,141120

TABLEAU V. (Suite.)

VALEURS de l'indice *m*.		VALEURS DU RAPPORT $\frac{X_m}{pb^2}$ RÉPONDANT A $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Neuf travées.			
1	8	0,093230	0,095666	0,099811	0,105660
2	7	0,026812	0,042005	0,058853	0,077358
3	6	0,044523	0,056314	0,069775	0,084906
4	5	0,040095	0,052737	0,067045	0,083019
		Dix travées.			
1	9	0,093235	0,095670	0,099815	0,105663
2	8	0,026788	0,041985	0,058838	0,077348
3	7	0,044615	0,056389	0,069832	0,084945
4	6	0,039753	0,052460	0,066834	0,082873
5	5	0,041374	0,053770	0,067833	0,083564
		Onze travées.			
1	10	0,093234	0,095669	0,099814	0,105662
2	9	0,026794	0,041991	0,058842	0,077351
3	8	0,044590	0,056369	0,069817	0,084934
4	7	0,039845	0,052535	0,066890	0,082912
5	6	0,041031	0,053493	0,067622	0,083418
		Douze travées.			
1	11	0,093234	0,095669	0,099814	0,105662
2	10	0,026792	0,041989	0,058841	0,077350
3	9	0,044597	0,056374	0,069821	0,084937
4	8	0,039820	0,052515	0,066875	0,082902
5	7	0,041123	0,053567	0,067679	0,083457
6	6	0,040689	0,053216	0,067411	0,083272

TABLEAU V. (Suite.)

VALEURS de l'indice m.		VALEURS DU RAPPORT $\frac{X_m}{pb^2}$ RÉPONDANT A δ = 1,1	1,2	1,25	1,3
		Neuf travées.			
1	8	0,113209	0,122452	0,127708	0,133386
2	7	0,097522	0,119344	0,130878	0,142826
3	6	0,101705	0,120173	0,130032	0,140309
4	5	0,100659	0,119965	0,130244	0,140938
		Dix travées.			
1	9	0,113210	0,122452	0,127707	0,133385
2	8	0,097516	0,119343	0,130879	0,142830
3	7	0,101727	0,120177	0,130028	0,140296
4	6	0,100578	0,119949	0,130260	0,140987
5	5	0,100961	0,120025	0,130183	0,140757
		Onze travées.			
1	10	0,113210	0,122452	0,127707	0,133385
2	9	0,097517	0,119343	0,130878	0,142829
3	8	0,101721	0,120176	0,130029	0,140299
4	7	0,100600	0,119954	0,130256	0,140974
5	6	0,100880	0,120009	0,130199	0,140805
		Douze travées.			
1	11	0,113210	0,122452	0,127707	0,133385
2	10	0,097517	0,119343	0,130878	0,142829
3	9	0,101722	0,120176	0,130029	0,140298
4	8	0,100594	0,119953	0,130257	0,140977
5	7	0,100902	0,120014	0,130195	0,140792
6	6	0,100799	0,119993	0,130215	0,140854

TABLEAU VI. — Abscisses des points où s'annulent les moments de flexion dus à la charge permanente.

(Voir les nos 42 et 43.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x_1 OU x_2 à la longueur de sa travée, pour $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Première travée.			
x_1......	Pour n quelconque.....	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
x_2......	3	0,83622	0,82818	0,81606	0,80000
	4	0,80795	0,80375	0,79634	0,78571
	5	0,81506	0,81000	0,80146	0,78947
	6	0,81313	0,80831	0,80008	0,78846
	7	0,81364	0,80876	0,80045	0,78873
	8	0,81350	0,80864	0,80035	0,78866
	9	0,81354	0,80867	0,80038	0,78868
	10	0,81353	0,80866	0,80037	0,78867
	11	0,81353	0,80866	0,80037	0,78868
	12	0,81353	0,80866	0,80037	0,78868
	....	....	....	....	....
	∞	0,81353	0,80866	0,80037	0,78868
		Deuxième travée.			
x_1......	3	Imaginaire.	Imaginaire.	0,34861	0,27639
	4	0,43324	0,36134	0,30631	0,26608
	5	0,50390	0,38485	0,31431	0,26858
	6	0,47771	0,37761	0,31202	0,26781
	7	0,48457	0,37947	0,31262	0,26799
	8	0,48216	0,37896	0,31246	0,26794
	9	0,48261	0,37910	0,31250	0,26795
	10	0,48249	0,37907	0,31249	0,26795
	11	0,48252	0,37908	0,31249	0,26795
	12	0,48251	0,37907	0,31249	0,26795
	....	....	....	....	....
	∞	0,48251	0,37907	0,31249	0,26795

TABLEAU VI. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x_1 OU x_2 à la longueur de sa travée, pour $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Première travée.			
x_1......	Pour n quelconque.....	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
x_2......	3	0,78009	0,75643	0,74321	0,72907
	4	0,77185	0,75474	0,74496	0,73437
	5	0,77405	0,75519	0,74449	0,73293
	6	0,77346	0,75507	0,74461	0,73331
	7	0,77361	0,75510	0,74458	0,73321
	8	0,77357	0,75509	0,74459	0,73324
	9	0,77358	0,75510	0,74458	0,73323
	10	0,77358	0,75510	0,74459	0,73323
	11	0,77358	0,75510	0,74459	0,73323
	12	0,77358	0,75510	0,74459	0,73323
	....	....	....	....	....
	∞	0,77358	0,75510	0,74459	0,73323
		Deuxième travée.			
x_1......	3	0,23873	0,21565	0,20734	0,20053
	4	0,23689	0,21564	0,20725	0,20004
	5	0,23737	0,21564	0,20727	0,20018
	6	0,23725	0,21564	0,20726	0,20014
	7	0,23727	0,21564	0,20727	0,20015
	8	0,23726	0,21564	0,20727	0,20015
	9	0,23726	0,21564	0,20727	0,20015
	10	0,23726	0,21564	0,20727	0,20015
	11	0,23726	0,21564	0,20727	0,20015
	12	0,23726	0,21564	0,20727	0,20015
	....	....	....	....	....
	∞	0,23726	0,21564	0,20727	0,20015

TABLEAU VI. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x_1 OU x_2 à la longueur de sa travée, pour $\delta =$			
		0,7	0,8	0,9	1,0
		Deuxième travée. (Suite.)			
x_2	3	Imaginaire.	Imaginaire.	0,65139	0,72361
	4	0,90467	0,84862	0,82083	0,80535
	5	0,74901	0,77140	0,77981	0,78385
	6	0,79835	0,79320	0,79103	0,78988
	7	0,78531	0,78745	0,78804	0,78835
	8	0,78938	0,78900	0,78884	0,78876
	9	0,78849	0,78859	0,78863	0,78865
	10	0,78873	0,78869	0,78869	0,78868
	11	0,78866	0,78867	0,78867	0,78867
	12	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868
	....	.....	....	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868
		Troisième travée.			
x_1	5	0,14576	0,16928	0,18532	0,19651
	6	0,13652	0,16553	0,18391	0,19605
	7	0,13922	0,16660	0,18430	0,19618
	8	0,13851	0,16610	0,18419	0,19615
	9	0,13870	0,16639	0,18422	0,19615
	10	0,13865	0,16637	0,18422	0,19615
	11	0,13866	0,16638	0,18422	0,19615
	12	0,13866	0,16638	0,18422	0,19615
	....	....	....	....	....
	∞	0,13866	0,16638	0,18422	0,19615

TABLEAU VI. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x_1 OU x_2 à la longueur de sa travée, pour δ = 1,1	1,2	1,25	1,3
		Deuxième travée. (Suite.)			
x_2	3	0,76127	0,78435	0,79266	0,79947
	4	0,79593	0,78984	0,78759	0,78573
	5	0,78672	0,78836	0,78896	0,78946
	6	0,78918	0,78876	0,78860	0,78846
	7	0,78854	0,78865	0,78870	0,78873
	8	0,78871	0,78868	0,78867	0,78866
	9	0,78867	0,78867	0,78868	0,78868
	10	0,78868	0,78868	0,78867	0,78867
	11	0,78867	0,78867	0,78868	0,78868
	12	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868
	....	....	....	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868
		Troisième travée.			
x_1	5	0,20445	0,21017	0,21241	0,21434
	6	0,20435	0,21017	0,21241	0,21432
	7	0,20438	0,21017	0,21241	0,21432
	8	0,20437	0,21017	0,21241	0,21432
	9	0,20438	0,21017	0,21241	0,21432
	10	0,20437	0,21017	0,21241	0,21432
	11	0,20437	0,21017	0,21241	0,21432
	12	0,20437	0,21017	0,21241	0,21432
	....	....	....	....	....
	∞	0,20437	0,21017	0,21241	0,21432

TABLEAU VI. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x_1 OU x_2 à la longueur de sa travée, pour $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Troisième travée. (Suite.)			
x_2	5	0,85424	0,83072	0,81468	0,80349
	6	0,77146	0,77753	0,78175	0,78472
	7	0,79331	0,79167	0,79053	0,78974
	8	0,78723	0,78769	0,78818	0,78839
	9	0,78901	0,78889	0,78881	0,78875
	10	0,78859	0,78862	0,78864	0,78865
	11	0,78870	0,78869	0,78868	0,78868
	12	0,78867	0,78867	0,78867	0,78867
	....	....	....	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868
		Quatrième travée.			
x_1	7	0,23151	0,22363	0,21868	0,21526
	8	0,23061	0,22330	0,21856	0,21538
	9	0,23084	0,22339	0,21860	0,21539
	10	0,23078	0,22336	0,21859	0,21539
	11	0,23080	0,22337	0,21859	0,21539
	12	0,23079	0,22337	0,21859	0,21539
	....	....	....	....	....
	∞	0,23080	0,22337	0,21859	0,21539
x_2	7	0,76849	0,77637	0,78132	0,78474
	8	0,79407	0,79197	0,79065	0,78977
	9	0,78723	0,78779	0,78815	0,78838
	10	0,78906	0,78891	0,78882	0,78875
	11	0,78857	0,78861	0,78864	0,78865
	12	0,78870	0,78869	0,78869	0,78868
	....	....	......	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868

TABLEAU VI. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x_1 OU x_2 à la longueur de sa travée, pour $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Troisième travée. (Suite.)			
x_2......	5	0,79555	0,78983	0,78759	0,78566
	6	0,78684	0,78837	0,78897	0,78948
	7	0,78917	0,78876	0,78860	0,78846
	8	0,78854	0,78865	0,78870	0,78873
	9	0,78871	0,78868	0,78867	0,78866
	10	0,78867	0,78867	0,78868	0,78868
	11	0,78868	0,78868	0,78867	0,78867
	12	0,78867	0,78868	0,78868	0,78868
	....	....	....	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868
		Quatrième travée.			
x_1......	7	0,21319	0,21164	0,21103	0,21052
	8	0,21319	0,21163	0,21103	0,21052
	9	0,21319	0,21163	0,21103	0,21052
	10	0,21319	0,21163	0,21103	0,21052
	11	0,21319	0,21163	0,21103	0,21052
	12	0,21319	0,21163	0,21103	0,21052
	....	....	....	....	....
	∞	0,21319	0,21163	0,21103	0,21052
x_2......	7	0,78681	0,78836	0,78897	0,78948
	8	0,78918	0,78876	0,78860	0,78846
	9	0,78854	0,78865	0,78870	0,78873
	10	0,78871	0,78868	0,78867	0,78866
	11	0,78866	0,78867	0,78868	0,78868
	12	0,78868	0,78868	0,78867	0,78867
	....	....	....	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868

TABLEAU VI. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE *n* des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x_1 OU x_2 à la longueur de sa travée, pour δ =			
		0,7	0,8	0,9	1,0
		Cinquième travée.			
x_1........	9	0,20615	0,20812	0,20939	0,21024
	10	0,20610	0,20809	0,20938	0,21023
	11	0,20611	0,20810	0,20938	0,21024
	12	0,20611	0,20810	0,20938	0,21024
	....	....	....	....	....
	∞	0,20611	0,20810	0,20938	0,21024
x_2........	9	0,79385	0,79188	0,79061	0,78976
	10	0,78729	0,78782	0,78816	0,78838
	11	0,78905	0,78891	0,78881	0,78875
	12	0,78858	0,78861	0,78864	0,78865
	....	....	....	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868
		Sixième travée.			
x_1........	11	0,21273	0,21219	0,21185	0,21162
	12	0,21272	0,21218	0,21185	0,21162
	....	....	....	....	....
	∞	0,21272	0,21219	0,21185	0,21162
x_2........	11	0,78727	0,78781	0,78815	0,78838
	12	0,78905	0,78892	0,78880	0,78875
	....	....	....	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868

TABLEAU VI. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x_1 OU x_2 à la longueur de sa travée, pour $\delta =$			
		1,1	1,2	1,25	1,3
		Cinquième travée.			
x_1	9	0,21083	0,21124	0,21140	0,21154
	10	0,21083	0,21124	0,21140	0,21154
	11	0,21083	0,21124	0,21140	0,21154
	12	0,21083	0,21124	0,21140	0,21154
	.....	....	....	....	....
	∞	0,21083	0,21124	0,21140	0,21154
x_2	9	0,78917	0,78876	0,78860	0,78846
	10	0,78854	0,78865	0,78870	0,78873
	11	0,78871	0,78868	0,78867	0,78866
	12	0,78867	0,78867	0,78868	0,78868
	....	....	....	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868
		Sixième travée.			
x_1	11	0,21146	0,21135	0,21130	0,21127
	12	0,21146	0,21135	0,21130	0,21127
	....	....	....	....	....
	∞	0,21146	0,21135	0,21130	0,21127
x_2	11	0,78854	0,78865	0,78870	0,78873
	12	0,78871	0,78868	0,78867	0,78866
	....	....	....	....	....
	∞	0,78868	0,78868	0,78868	0,78868

TABLEAU VII. — Coefficients — C des moments de flexion maxima, produits par la charge permanente, vers le milieu de chaque travée.

(Voir les nos 42 et 43.)

RANG de la travée.	NOMBRE n des travées.	COEFFICIENT — C POUR δ = 0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,25	1,3
1re.	3	0,0874	0,0857	0,0832	0,0800	0,0761	0,0715	0,0690	0,0664
	4	0,0816	0,0804	0,0793	0,0772	0,0745	0,0712	0,0694	0,0674
	5	0,0830	0,0820	0,0803	0,0779	0,0749	0,0713	0,0693	0,0672
	6	0,0827	0,0817	0,0800	0,0777	0,0748	0,0713	0,0693	0,0672
	7	0,0828	0,0818	0,0801	0,0778	0,0748	0,0713	0,0693	0,0672
	8	0,0827	0,0817	0,0801	0,0777	0,0748	0,0713	0,0693	0,0672
	9	0,0827	0,0817	0,0801	0,0778	0,0748	0,0713	0,0693	0,0672
	...	......	......	......	......	......	......	......	......
2e.	3	0,0206	0,0059	0,0093	0,0250	0,0413	0,0582	0,0669	0,0758
	4	0,0136	0,0190	0,0268	0,0364	0,0473	0,0593	0,0658	0,0725
	5	0,0037	0,0120	0,0219	0,0332	0,0456	0,0590	0,0661	0,0734
	6	0,0063	0,0138	0,0232	0,0341	0,0461	0,0591	0,0660	0,0731
	7	0,0056	0,0133	0,0229	0,0338	0,0460	0,0591	0,0660	0,0732
	8	0,0058	0,0135	0,0230	0,0339	0,0460	0,0591	0,0660	0,0732
	9	0,0057	0,0134	0,0230	0,0339	0,0460	0,0591	0,0660	0,0732
	...	......	......	......	......	......	......	......	......
3e.	5	0,0307	0,0350	0,0401	0,0461	0,0528	0,0605	0,0646	0,0690
	6	0,0247	0,0300	0,0362	0,0433	0,0513	0,0602	0,0649	0,0699
	7	0,0262	0,0313	0,0372	0,0440	0,0517	0,0603	0,0648	0,0696
	8	0,0258	0,0309	0,0369	0,0438	0,0516	0,0602	0,0649	0,0697
	9	0,0259	0,0310	0,0370	0,0439	0,0516	0,0602	0,0649	0,0697
	...	......	......	......	......	......	......	......	......
4e.	7	0,0177	0,0244	0,0321	0,0405	0,0498	0,0599	0,0652	0,0708
	8	0,0194	0,0259	0,0331	0,0412	0,0502	0,0600	0,0652	0,0706
	9	0,0190	0,0255	0,0328	0,0410	0,0501	0,0599	0,0652	0,0706
	10	0,0191	0,0256	0,0329	0,0411	0,0501	0,0599	0,0652	0,0706
	...	......	......	......	......	......	......	......	......
5e.	9	0,0212	0,0273	0,0342	0,0420	0,0506	0,0600	0,0651	0,0703
	10	0,0207	0,0269	0,0339	0,0418	0,0505	0,0600	0,0651	0,0704
	11	0,0208	0,0270	0,0340	0,0418	0,0505	0,0600	0,0651	0,0704
	...	......	......	......	......	......	......	......	......
6e.	11	0,0202	0,0265	0,0336	0,0416	0,0504	0,0600	0,0651	0,0704
	12	0,0203	0,0266	0,0337	0,0416	0,0504	0,0600	0,0651	0,0704

TABLEAU VIII. — Calcul des abscisses x'', x'''.

(Voir les nos 44 et 48.)

VALEURS de l'indice k.	VALEURS DE L'EXPRESSION $\frac{\beta_k}{1+\beta_k}$ POUR $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,25	1,3
1	0,17073	0,18182	0,19149	0,20000	0,20755	0,21429	0,21739	0,22034
2	0,20859	0,20930	0,20994	0,21053	0,21106	0,21154	0,21176	0,21198
3	0,21113	0,21118	0,21123	0,21127	0,21131	0,21134	0,21136	0,21137
4	0,21131	0,21131	0,21132	0,21132	0,21132	0,21133	0,21133	0,21133
5	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21133	0,21133
6	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132
7	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132	0,21132
...	....	....	....	....	....	....	....	....

TABLEAU IX. — Calcul des abscisses x', x^{IV}.

(Voir les nos 44 et 48.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x' OU x^{IV} à la longueur de sa travée, pour $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Première travée.			
x'......	Pour n quelconque.....	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
x^{IV}......	3	0,84643	0,85390	0,86060	0,86667
	4	0,84450	0,85243	0,85958	0,86607
	5	0,84437	0,85233	0,85951	0,86603
	6	0,84436	0,85232	0,85951	0,86603
	7	0,84435	0,85232	0,85951	0,86603
	....	....	....	....	....
	∞	0,84435	0,85232	0,85950	0,86603
		Deuxième travée.			
x'........	3	0,09425	0,10114	0,10725	0,11270
	4	0,09127	0,09880	0,10556	0,11169
	5	0,09105	0,09862	0,10544	0,11161
	6	0,09104	0,09861	0,10543	0,11161
	7	0,09104	0,09861	0,10543	0,11161
	....	....	....	....	....
	∞	0,09104	0,09861	0,10543	0,11161
x^{IV}......	3	0,90575	0,89886	0,89275	0,88730
	4	0,87823	0,87863	0,87902	0,87939
	5	0,87627	0,87719	0,87804	0,87882
	6	0,87613	0,87709	0,87797	0,87878
	7	0,87612	0,87708	0,87796	0,87878
	....	....	....	....	....
	∞	0,87612	0,87708	0,87796	0,87878
		Troisième travée.			
x'.......	5	0,11829	0,11875	0,11917	0,11956
	6	0,11803	0,11856	0,11904	0,11948
	7	0,11801	0,11855	0,11903	0,11947
	....	....	....	....	....
	∞	0,11801	0,11855	0,11903	0,11947

TABLEAU IX. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x' OU x^{IV} à la longueur de sa travée, pour $\delta =$			
		1,1	1,2	1,25	1,3
		Première travée.			
x'.......	Pour n quelconque......	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
x^{IV}......	3	0,87219	0,87723	0,87960	0,88187
	4	0,87198	0,87739	0,87993	0,88236
	5	0,87197	0,87740	0,87995	0,88240
	6	0,87197	0,87740	0,87995	0,88240
	7	0,87197	0,87740	0,87995	0,88240
	....	....	....	....	....
	∞	0,87197	0,87740	0,87995	0,88240
		Deuxième travée.			
x'.......	3	0,11760	0,12294	0,12410	0,12606
	4	0,11725	0,12235	0,12470	0,12698
	5	0,11722	0,12235	0,12475	0,12705
	6	0,11722	0,12235	0,12475	0,12705
	7	0,11722	0,12235	0,12475	0,12705
	....	....	....	....	....
	∞	0,11722	0,12235	0,12475	0,12705
x^{IV}......	3	0,88240	0,87796	0,87590	0,87394
	4	0,87973	0,88004	0,88022	0,88036
	5	0,87954	0,88022	0,88054	0,88084
	6	0,87953	0,88023	0,88056	0,88088
	7	0,87953	0,88023	0,88056	0,88088
	....	....	....	....	....
	∞	0,87953	0,88023	0,88056	0,88088
		Troisième travée.			
x'.......	5	0,11990	0,12022	0,12037	0,12051
	6	0,11990	0,12024	0,12041	0,12058
	7	0,11988	0,12024	0,12042	0,12058
	....	....	....	....	....
	∞	0,11988	0,12024	0,12042	0,12058

TABLEAU IX. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x' OU x^{IV} à la longueur de sa travée, pour $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Troisième travée (suite).			
x^{IV}.....	5	0,88171	0,88125	0,88083	0,88044
	6	0,87978	0,87982	0,87985	0,87988
	7	0,87965	0,87972	0,87978	0,87984
	8	0,87963	0,87970	0,87977	0,87983
	...	....	....	....	....
	∞	0,87963	0,87970	0,87977	0,87983
		Quatrième travée.			
x'......	7	0,11995	0,11999	0,12002	0,12004
	8	0,11993	0,11997	0,12001	0,12004
	...	....	....	....	....
	∞	0,11993	0,11997	0,12001	0,12004
x^{IV}.....	7	0,88005	0,88001	0,87998	0,87996
	8	0,87991	0,87991	0,87991	0,87992
	9	0,87990	0,87990	0,87991	0,87991
	...	....	....	....	....
	∞	0,87990	0,87990	0,87991	0,87991
		Cinquième travée.			
x'......	9	0,12007	0,12008	0,12008	0,12008
	10	0,12007	0,12007	0,12008	0,12008
	...	....	....	....	....
	∞	0,12007	0,12007	0,12008	0,12008
x^{IV}.....	9	0,87993	0,87992	0,87992	0,87992
	10	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992
	...	....	....	....	....
	∞	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992
		Travée de rang supérieur à 5.			
x'......	$n > 10$	0,12008	0,12008	0,12008	0,12008
x^{IV}.....	$n > 10$	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992

TABLEAU IX. (Suite.)

INDICATION des abscisses.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE CHAQUE ABSCISSE x' OU x^{IV} à la longueur de sa travée, pour $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Troisième travée (suite).			
x^{IV}.....	5	0,88010	0,87978	0,87963	0,87949
	6	0,87990	0,87993	0,87994	0,87995
	7	0,87989	0,87994	0,87996	0,87998
	8	0,87989	0,87993	0,87996	0,87999
	...	....	....	....	....
	∞	0,87989	0,87993	0,87996	0,87999
		Quatrième travée.			
x'......	7	0,12007	0,12009	0,12010	0,12011
	8	0,12007	0,12009	0,12011	0,12012
	...	....	....	....	....
	∞	0,12007	0,12009	0,12011	0,12012
x^{IV}.....	7	0,87993	0,87991	0,87990	0,87989
	8	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992
	9	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992
	...	....	....	....	....
	∞	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992
		Cinquième travée.			
x'......	9	0,12008	0,12008	0,12008	0,12008
	10	0,12008	0,12008	0,12008	0,12008
	...	....	....	....	....
	∞	0,12008	0,12008	0,12008	0,12008
x^{IV}.....	9	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992
	10	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992
	...	....	....	....	....
	∞	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992
		Travée de rang supérieur à 5.			
x'......	$n > 10$	0,12008	0,12008	0,12008	0,12008
x^{IV}.....	$n > 10$	0,87992	0,87992	0,87992	0,87992

TABLEAU X. — Moments de flexion sur les appuis, quand les travées sont surchargées de deux en deux.

(Voir les nos 49 et 51.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Trois travées.			
2	1	0,020915	0,029091	0,038777	0,050000
1, 3	1	0,060976	0,056818	0,053191	0,050000
		Quatre travées.			
2, 4	1	0,023858	0,032118	0,042000	0,053571
	2	0,006619	0,015469	0,025168	0,035714
1, 3	1	0,072167	0,066007	0,059829	0,053571
	2	0,006619	0,015469	0,025168	0,035714
		Cinq travées.			
2, 4	1	0,021043	0,029767	0,040276	0,052632
	2	0,020291	0,026047	0,032445	0,039474
1, 3, 5	1	0,071426	0,065233	0,058992	0,052632
	2	0,010215	0,018953	0,028702	0,039474
		Six travées.			
2, 4, 6	1	0,021254	0,029983	0,040504	0,052885
	2	0,019268	0,025079	0,031482	0,038462
	3	0,024174	0,029703	0,036069	0,043269
1, 3, 5	1	0,072184	0,065865	0,059455	0,052885
	2	0,006536	0,016108	0,026744	0,038462
	3	0,024174	0,029703	0,036069	0,043269
		Sept travées.			
2, 4, 6	1	0,021052	0,029814	0,040380	0,052817
	2	0,020250	0,025839	0,032005	0,038732
	3	0,020450	0,026832	0,034099	0,042254
1, 3, 5, 7	1	0,072128	0,065807	0,059394	0,052817
	2	0,006809	0,016366	0,027001	0,038732
	3	0,023138	0,028727	0,035100	0,042254

TABLEAU X. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Trois travées.			
2	1	0,062783	0,077143	0,084918	0,093093
1, 3	1	0,047170	0,044643	0,043478	0,042373
		Quatre travées.			
2, 4	1	0,066889	0,081998	0,090236	0,098935
	2	0,047106	0,059342	0,065776	0,072421
1, 3	1	0,047186	0,040634	0,037285	0,033881
	2	0,047106	0,059342	0,065776	0,072421
		Cinq travées.			
2, 4	1	0,066884	0,083077	0,091912	0,101244
	2	0,047123	0,055385	0,059743	0,064251
1, 3, 5	1	0,046093	0,039327	0,035846	0,032293
	2	0,051281	0,064135	0,070956	0,078041
		Six travées.			
2, 4, 6	1	0,067177	0,083428	0,092298	0,101672
	2	0,046004	0,054099	0,058350	0,062736
	3	0,051305	0,060176	0,064925	0,069882
1, 3, 5	1	0,046095	0,039037	0,035395	0,031672
	2	0,051275	0,065197	0,072576	0,080236
	3	0,051305	0,060176	0,064925	0,069882
		Sept travées.			
2, 4, 6	1	0,067177	0,083505	0,092419	0,101839
	2	0,046006	0,053814	0,057916	0,062148
	3	0,051299	0,061237	0,066542	0,072070
1, 3, 5, 7	1	0,046016	0,038943	0,035292	0,031557
	2	0,051575	0,065541	0,072950	0,080643
	3	0,050185	0,058892	0,063535	0,068371

TABLEAU X. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Huit travées.			
2, 4, 6, 8	1	0,021067	0,029829	0,040397	0,052835
	2	0,020176	0,025769	0,031936	0,038660
	3	0,020729	0,027095	0,034359	0,042526
	4	0,019409	0,025852	0,033128	0,041237
1, 3, 5, 7	1	0,072182	0,065853	0,059428	0,052835
	2	0,006545	0,016163	0,026861	0,038660
	3	0,024136	0,029496	0,035628	0,042526
	4	0,019409	0,025852	0,033128	0,041237
		Neuf travées.			
2, 4, 6, 8	1	0,021052	0,029817	0,040388	0,052830
	2	0,020247	0,025824	0,031974	0,038679
	3	0,020461	0,026889	0,034217	0,042453
	4	0,020408	0,026622	0,033657	0,041509
1, 3, 5, 7, 9	1	0,072178	0,065849	0,059423	0,052830
	2	0,006565	0,016181	0,026880	0,038679
	3	0,024062	0,029426	0,035558	0,042453
	4	0,019688	0,026115	0,033388	0,041509
		Dix travées.			
2, 4, 6, 8, 10	1	0,021053	0,029818	0,040389	0,052831
	2	0,020241	0,025819	0,031969	0,038674
	3	0,020481	0,026907	0,034236	0,042472
	4	0,020333	0,026552	0,033587	0,041436
	5	0,020687	0,026885	0,033917	0,041782
1, 3, 5, 7, 9	1	0,072182	0,065852	0,059426	0,052831
	2	0,006546	0,016167	0,026870	0,038674
	3	0,024133	0,029481	0,035596	0,042472
	4	0,019420	0,025908	0,033247	0,041436
	5	0,020687	0,026885	0,033917	0,041782

TABLEAU X. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Huit travées.			
2, 4, 6, 8	1	0,067198	0,083530	0,092447	0,101869
	2	0,045926	0,053722	0,057816	0,062039
	3	0,051599	0,061581	0,066914	0,072475
	4	0,050179	0,059953	0,065152	0,070560
1, 3, 5, 7	1	0,046016	0,038923	0,035259	0,031513
	2	0,051574	0,065618	0,073066	0,080801
	3	0,050187	0,058607	0,063102	0,067785
	4	0,050179	0,059953	0,065152	0,070560
		Neuf travées.			
2, 4, 6, 8	1	0,067198	0,083536	0,092456	0,101881
	2	0,045926	0,053702	0,057785	0,061997
	3	0,051598	0,061657	0,067030	0,072633
	4	0,050180	0,059669	0,064719	0,069973
1, 3, 5, 7, 9	1	0,046011	0,038916	0,035252	0,031505
	2	0,051596	0,065642	0,073093	0,080830
	3	0,050106	0,058515	0,063002	0,067676
	4	0,050479	0,060297	0,065525	0,070965
		Dix travées.			
2, 4, 6, 8, 10	1	0,067199	0,083538	0,092458	0,101884
	2	0,045920	0,053695	0,057778	0,061989
	3	0,051620	0,061682	0,067057	0,072662
	4	0,050100	0,059576	0,064619	0,069865
	5	0,050480	0,060013	0,065091	0,070378
1, 3, 5, 7, 9	1	0,046011	0,038914	0,035250	0,031501
	2	0,051596	0,065648	0,073101	0,080841
	3	0,050107	0,058495	0,062971	0,067634
	4	0,050478	0,060373	0,065641	0,071122
	5	0,050480	0,060013	0,065091	0,070378

TABLEAU X. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$			
		0,7	0,8	0,9	1,0
		Onze travées.			
2, 4, 6, 8, 10	1	0,021052	0,029817	0,040388	0,052831
	2	0,020246	0,025823	0,031971	0,038675
	3	0,020462	0,026893	0,034226	0,042467
	4	0,020405	0,026607	0,033625	0,041456
	5	0,020419	0,026679	0,033775	0,041709
1, 3, 5, 7, 9, 11	1	0,072181	0,065852	0,059425	0,052831
	2	0,006548	0,016168	0,026871	0,038675
	3	0,024128	0,029476	0,035591	0,042467
	4	0,019440	0,025927	0,033266	0,041456
	5	0,020612	0,026815	0,033847	0,041709
		Douze travées.			
2, 4, 6, 8, 10, 12	1	0,021052	0,029817	0,040388	0,052831
	2	0,020246	0,025822	0,031971	0,038675
	3	0,020464	0,026894	0,034227	0,042469
	4	0,020399	0,026602	0,033620	0,041451
	5	0,020439	0,026697	0,033794	0,041728
	6	0,020344	0,026608	0,033705	0,041636
1, 3, 5, 7, 9, 11	1	0,072182	0,065852	0,059425	0,052831
	2	0,006546	0,016167	0,026870	0,038675
	3	0,024133	0,029480	0,035594	0,042469
	4	0,019421	0,025913	0,033255	0,041451
	5	0,020684	0,026870	0,033885	0,041728
	6	0,020344	0,026608	0,033705	0,041636

TABLEAU X. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Onze travées.			
2, 4, 6, 8, 10	1	0,067199	0,083538	0,092458	0,101884
	2	0,045920	0,053694	0,057775	0,061986
	3	0,051620	0,061688	0,067065	0,072673
	4	0,050100	0,059556	0,064588	0,069823
	5	0,050480	0,060089	0,065207	0,070535
1, 3, 5, 7, 9, 11	1	0,046010	0,038914	0,035249	0,031501
	2	0,051597	0,065650	0,073103	0,080843
	3	0,050101	0,058488	0,062964	0,067626
	4	0,050500	0,060398	0,065667	0,071151
	5	0,050400	0,059920	0,064992	0,070270
		Douze travées.			
2, 4, 6, 8, 10, 12	1	0,067200	0,083538	0,092458	0,101885
	2	0,045920	0,053693	0,057775	0,061985
	3	0,051622	0,061689	0,067067	0,072675
	4	0,050094	0,059549	0,064581	0,069815
	5	0,050502	0,060114	0,065234	0,070564
	6	0,050400	0,059997	0,065108	0,070427
1, 3, 5, 7, 9, 11	1	0,046010	0,038914	0,035249	0,031501
	2	0,051597	0,065650	0,073104	0,080844
	3	0,050101	0,058487	0,062961	0,067623
	4	0,050500	0,060403	0,065676	0,071162
	5	0,050400	0,059900	0,064960	0,070228
	6	0,050400	0,059997	0,065108	0,070427

TABLEAU XI. — Moments de flexion sur trois appuis consécutifs, quand on surcharge les deux travées limitées par ces appuis, et les autres travées de deux en deux. (Voir les nos 50 et 51.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Trois travées.			
1, 2	1	0,097699	0,102143	0,108476	0,116667
	2	0,005106	0,012857	0,022269	0,033333
		Quatre travées.			
1, 2, 4	1	0,101606	0,105903	0,112208	0,120536
	2	−0,013873	−0,004063	0,006511	0,017857
2, 3	1	0,014057	0,020000	0,027201	0,035714
	2	0,054221	0,070000	0,087649	0,107143
		Cinq travées.			
1, 2, 4	1	0,098860	0,103605	0,110521	0,119617
	2	−0,000535	0,006279	0,013634	0,021531
2, 3, 5	1	0,013157	0,019079	0,026242	0,034689
	2	0,058595	0,074144	0,091699	0,111244
	3	−0,002537	0,004344	0,011961	0,020335
		Six travées.			
1, 2, 4, 6	1	0,099076	0,103824	0,110752	0,119872
	2	−0,001583	0,005294	0,012660	0,020513
2, 3, 5	1	0,013903	0,019701	0,026697	0,034936
	2	0,054972	0,071346	0,089779	0,110256
	3	0,011211	0,014915	0,019189	0,024038
1, 3, 4, 6	2	−0,003728	0,003220	0,010867	0,019231
	3	0,063114	0,078390	0,095817	0,115385
		Sept travées.			
1, 2, 4, 6	1	0,098874	0,103655	0,110628	0,119804
	2	−0,000603	0,006053	0,013182	0,020783

TABLEAU XI. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p' b^2}$, POUR $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Trois travées.			
1, 2	1	0,126691	0,138527	0,145119	0,152158
	2	0,046045	0,060402	0,068196	0,076401
		Quatre travées.			
1, 2, 4	1	0,130897	0,143301	0,150272	0,157755
	2	0,029983	0,042895	0,049647	0,056598
2, 3	1	0,045582	0,056842	0,063004	0,069525
	2	0,128459	0,151579	0,163810	0,176487
		Cinq travées.			
1, 2, 4	1	0,130900	0,144375	0,151936	0,160046
	2	0,029972	0,038958	0,043656	0,048491
2, 3, 5	1	0,044454	0,055567	0,061637	0,068053
	2	0,132766	0,156253	0,168731	0,181697
	3	0,029483	0,039420	0,044688	0,050157
		Six travées.			
1, 2, 4, 6	1	0,131194	0,144725	0,152322	0,160473
	2	0,028851	0,037674	0,042267	0,046981
2, 3, 5	1	0,044453	0,055280	0,061192	0,067441
	2	0,132769	0,157307	0,170333	0,183863
	3	0,029472	0,035493	0,038726	0,042107
1, 3, 4, 6	2	0,028327	0,038169	0,043373	0,048767
	3	0,137086	0,160915	0,173626	0,186867
		Sept travées.			
1, 2, 4, 6	1	0,131193	0,144803	0,152442	0,160639
	2	0,028853	0,037390	0,041833	0,046392

TABLEAU XI. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Sept travées (suite).			
2, 3, 5, 7	1	0,013846	0,019643	0,026636	0,034868
	2	0,055249	0,071608	0,090039	0,110529
	3	0,010160	0,013926	0,018210	0,023016
1, 3, 4, 6	2	—0,002758	0,003969	0,011381	0,019495
	3	0,059435	0,075561	0,093882	0,114394
	4	0,010016	0,013787	0,018090	0,022930
		Huit travées.			
1, 2, 4, 6, 8	1	0,098889	0,103670	0,110644	0,119822
	2	—0,000676	0,005983	0,013113	0,020711
2, 3, 5, 7	1	0,013900	0,019688	0,026669	0,034886
	2	0,054986	0,071404	0,089899	0,110457
	3	0,011157	0,014694	0,018737	0,023288
1, 3, 4, 6, 8	2	—0,002833	0,003899	0,011311	0,019422
	3	0,059717	0,075826	0,094145	0,114668
	4	0,008963	0,012795	0,017109	0,021907
2, 4, 5, 7	3	0,011003	0,014545	0,018608	0,023196
	4	0,055749	0,072727	0,091946	0,113402
		Neuf travées.			
1, 2, 4, 6, 8	1	0,098875	0,103658	0,110635	0,119817
	2	—0,000606	0,006038	0,013151	0,020730
2, 3, 5, 7, 9	1	0,013896	0,019684	0,026664	0,034881
	2	0,055005	0,071423	0,089917	0,110476
	3	0,011082	0,014624	0,018667	0,023215

TABLEAU XI. (Suite.)

RANGS $k, k', \dots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\dots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Sept travées (suite).			
2, 3, 5, 7	1	0,044375	0,055186	0,061089	0,067327
	2	0,133069	0,157651	0,170705	0,184267
	3	0,028349	0,034211	0,037341	0,040605
1, 3, 4, 6	2	0,028326	0,037887	0,042944	0,048187
	3	0,137090	0,161967	0,175223	0,189022
	4	0,028314	0,034244	0,037415	0,040724
		Huit travées.			
1, 2, 4, 6, 8	1	0,131214	0,144828	0,152470	0,160670
	2	0,028773	0,037297	0,041733	0,046283
2, 3, 5, 7	1	0,044375	0,055165	0,061057	0,067282
	2	0,133069	0,157727	0,170821	0,184425
	3	0,028350	0,033927	0,036908	0,040019
1, 3, 4, 6, 8	2	0,028246	0,037795	0,042844	0,048079
	3	0,137391	0,162311	0,175594	0,189425
	4	0,027191	0,032962	0,036031	0,039223
2, 4, 5, 7	3	0,028313	0,033962	0,036988	0,040147
	4	0,137094	0,163019	0,176819	0,191176
		Neuf travées.			
1, 2, 4, 6, 8	1	0,131214	0,144834	0,152479	0,160682
	2	0,028773	0,037277	0,041702	0,046241
2, 3, 5, 7, 9	1	0,044369	0,055159	0,061049	0,067274
	2	0,133090	0,157752	0,170848	0,184454
	3	0,028270	0,033835	0,036808	0,039910

TABLEAU XI. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'..}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Neuf travées (suite).			
1, 3, 4, 6, 8	2	—0,002762	0,003953	0,011349	0,019441
	3	0,059450	0,075620	0,094004	0,114595
	4	0,009961	0,013565	0,017637	0,022179
2, 4, 5, 7, 9	3	0,010928	0,014474	0,018538	0,023122
	4	0,056031	0,072993	0,092208	0,113676
	5	0,009950	0,013471	0,017628	0,022173
		Dix travées.			
1, 2, 4, 6, 8, 10	1	0,098876	0,103659	0,110636	0,119819
	2	—0,000611	0,006033	0,013146	0,020725
2, 3, 5, 7, 9	1	0,013900	0,019687	0,026667	0,034882
	2	0,054987	0,071408	0,089907	0,110471
	3	0,011154	0,014679	0,018705	0,023234
1, 3, 4, 6, 8, 10	2	—0,002767	0,003948	0,011344	0,019436
	3	0,059470	0,075639	0,094022	0,114614
	4	0,009886	0,013494	0,017567	0,022106
2, 4, 5, 7, 9	3	0,010999	0,014530	0,018576	0,023142
	4	0,055763	0,072787	0,092067	0,113603
	5	0,010949	0,014324	0,018156	0,022445
1, 3, 5, 6, 8, 10	4	0,009875	0,013484	0,017558	0,022099
	5	0,056313	0,073258	0,092471	0,113950
		Onze travées.			
1, 2, 4, 6, 8, 10	1	0,098875	0,103658	0,110636	0,119818
	2	—0,000606	0,006037	0,013149	0,020726
2, 3, 5, 7, 9, 11	1	0,013900	0,019687	0,026666	0,034882
	2	0,054988	0,071410	0,089908	0,110472
	3	0,011149	0,014674	0,018700	0,023229

TABLEAU XI. (Suite.)

RANGS $k, k', \dots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\dots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$			
		1,1	1,2	1,25	1,3
		Neuf travées (suite).			
1, 3, 4, 6, 8	2	0,028246	0,037774	0,042813	0,048037
	3	0,137390	0,162387	0,175710	0,189582
	4	0,027192	0,032678	0,035598	0,038637
2, 4, 5, 7, 9	3	0,028232	0,033870	0,036888	0,040039
	4	0,137394	0,163362	0,177190	0,191579
	5	0,027190	0,032681	0,035604	0,038646
		Dix travées.			
1, 2, 4, 6, 8, 10	1	0,131216	0,144835	0,152481	0,160684
	2	0,028767	0,037270	0,041694	0,046233
2, 3, 5, 7, 9	1	0,044369	0,055157	0,061047	0,067271
	2	0,133090	0,157757	0,170856	0,184465
	3	0,028270	0,033814	0,036777	0,039868
1, 3, 4, 6, 8, 10	2	0,028240	0,037768	0,042806	0,048029
	3	0,137412	0,162412	0,175736	0,189611
	4	0,027112	0,032586	0,035499	0,038529
2, 4, 5, 7, 9	3	0,028232	0,033850	0,036857	0,039997
	4	0,137394	0,163438	0,177306	0,191736
	5	0,027191	0,032396	0,035171	0,038060
1, 3, 5, 6, 8, 10	4	0,027109	0,032588	0,035504	0,038538
	5	0,137695	0,163706	0,177560	0,191981
		Onze travées.			
1, 2, 4, 6, 8, 10	1	0,131216	0,144836	0,152481	0,160685
	2	0,028767	0,037269	0,041692	0,046230
2, 3, 5, 7, 9, 11	1	0,044369	0,055157	0,061046	0,067270
	2	0,133092	0,157759	0,170858	0,184467
	3	0,028264	0,033808	0,036770	0,039860

TABLEAU XI. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
		Onze travées (suite).			
1, 3, 4, 6, 8, 10	2	—0,002762	0,003952	0,011346	0,019438
	3	0,059451	0,075625	0,094012	0,114609
	4	0,009958	0,013550	0,017605	0,022126
2, 4, 5, 7, 9, 11	3	0,010994	0,014525	0,018571	0,023137
	4	0,055783	0,072805	0,092069	0,113623
	5	0,010874	0,014254	0,018086	0,022372
1, 3, 5, 6, 8, 10	4	0,009947	0,013539	0,017596	0,022119
	5	0,056045	0,073052	0,092330	0,113877
	6	0,010873	0,014253	0,018085	0,022371
		Douze travées.			
1, 2, 4, 6, 8, 10, 12	1	0,098875	0,103659	0,110636	0,119819
	2	—0,000606	0,006036	0,013148	0,020726
2, 3, 5, 7, 9, 11	1	0,013900	0,019687	0,026667	0,034882
	2	0,054987	0,071409	0,089908	0,110472
	3	0,011154	0,014678	0,018703	0,023231
1, 3, 4, 6, 8, 10, 12	2	—0,002763	0,003952	0,011346	0,019437
	3	0,059453	0,075626	0,094013	0,114611
	4	0,009952	0,013544	0,017600	0,022120
2, 4, 5, 7, 9, 11	3	0,010999	0,014528	0,018573	0,023138
	4	0,055764	0,072791	0,092076	0,113618
	5	0,010946	0,014309	0,018124	0,022391
1, 3, 5, 6, 8, 10, 12	4	0,009941	0,013534	0,017591	0,022114
	5	0,056065	0,073071	0,092348	0,113897
	6	0,010798	0,014182	0,018016	0,022298
2, 4, 6, 7, 9, 11	5	0,019945	0,014308	0,018123	0,022391
	6	0,055778	0,072846	0,092188	0,113805

TABLEAU XI. (Suite.)

RANGS $k, k', \ldots$ des travées surchargées.	INDICE m de l'appui.	RAPPORTS $\frac{X_m^{kk'\ldots}}{p'b^2}$, POUR $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
		Onze travées (suite).			
1, 3, 4, 6, 8, 10	2	0,028240	0,037766	0,042804	0,048026
	3	0,137412	0,162417	0,175745	0,189622
	4	0,027112	0,032566	0,035468	0,038487
2, 4, 5, 7, 9, 11	3	0,028227	0,033843	0,036850	0,039989
	4	0,137416	0,163463	0,177332	0,191765
	5	0,027111	0,032304	0,035071	0,037951
1, 3, 5, 6, 8, 10	4	0,027109	0,032568	0,035473	0,038496
	5	0,137695	0,163782	0,177676	0,192138
	6	0,027111	0,032304	0,035071	0,037952
		Douze travées.			
1, 2, 4, 6, 8, 10, 12	1	0,131216	0,144836	0,152481	0,160685
	2	0,028767	0,037268	0,041692	0,046230
2, 3, 5, 7, 9, 11	1	0,044369	0,055157	0,061046	0,067270
	2	0,133092	0,157759	0,170859	0,184468
	3	0,028264	0,033806	0,036768	0,039857
1, 3, 4, 6, 8, 10, 12	2	0,028240	0,037766	0,042803	0,048025
	3	0,137413	0,162419	0,175747	0,189624
	4	0,027106	0,032559	0,035460	0,038479
2, 4, 5, 7, 9, 11	3	0,028227	0,033842	0,036848	0,039986
	4	0,137416	0,163469	0,177341	0,191776
	5	0,027111	0,032284	0,035040	0,037909
1, 3, 5, 6, 8, 10, 12	4	0,027104	0,032561	0,035466	0,038488
	5	0,137716	0,163807	0,177703	0,192167
	6	0,027030	0,032212	0,034972	0,037844
2, 4, 6, 7, 9, 11	5	0,027111	0,032284	0,035040	0,037910
	6	0,137695	0,163858	0,177792	0,192295

TABLEAU XII. — Abscisses x^{v} des moments maxima négatifs, qui sont produits par la surcharge seule, vers le milieu des travées.

(Voir le n° 58.)

RANG de la travée.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE L'ABSCISSE x^{v} à la longueur de sa travée, pour $\delta =$ 0,7	0,8	0,9	1,0
1re.	3	0,43902	0,44318	0,44681	0,45000
	4	0,42783	0,43399	0,44017	0,44643
	5	0,42857	0,43477	0,44101	0,44737
	6	0,42782	0,43414	0,44054	0,44712
	7	0,42787	0,43419	0,44061	0,44718
	8	0,42782	0,43415	0,44057	0,44716
	9	0,42782	0,43415	0,44058	0,44717
	10	0,42782	0,43415	0,44057	0,44717
	...	....	....	....	....
2e.	3	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	4	0,53518	0,52601	0,52078	0,51786
	5	0,50390	0,50581	0,50967	0,51316
	6	0,50405	0,50766	0,51114	0,51442
	7	0,50164	0,50621	0,51034	0,51408
	8	0,50182	0,50634	0,51045	0,51418
	9	0,50164	0,50624	0,51039	0,51415
	10	0,50166	0,50625	0,51040	0,51416
	11	0,50164	0,50624	0,51039	0,51416
	...	....	....	....	....
3e.	5	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	6	0,46400	0,47876	0,48849	0,49519
	7	0,46667	0,48069	0,49000	0,49648
	8	0,46410	0,47917	0,48918	0,49613
	9	0,46429	0,47930	0,48929	0,49623
	10	0,46411	0,47920	0,48923	0,49620
	11	0,46412	0,47921	0,48923	0,49621
	12	0,46411	0,47920	0,48923	0,49621
4e.	7	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	8	0,50269	0,50194	0,50152	0,50129
	9	0,50011	0,50042	0,50069	0,50094
	10	0,50030	0,50055	0,50080	0,50104
	11	0,50012	0,50045	0,50074	0,50101
	12	0,50013	0,50046	0,50075	0,50102
5e.	9	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	10	0,49741	0,49847	0,49917	0,49965
	11	0,49761	0,49861	0,49928	0,49975
	12	0,49742	0,49850	0,49922	0,49972
6e.	11	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	12	0,50019	0,50014	0,50011	0,50009

TABLEAU XII. (Suite.)

RANG de la travée.	NOMBRE n des travées.	RAPPORT DE L'ABSCISSE x^v à la longueur de sa travée, pour $\delta =$ 1,1	1,2	1,25	1,3
1re.	3	0,45283	0,45536	0,45652	0,45763
	4	0,45281	0,45937	0,46272	0,46612
	5	0,45391	0,46067	0,46415	0,46771
	6	0,45391	0,46096	0,46460	0,46833
	7	0,45398	0,46106	0,46471	0,46844
	8	0,45398	0,46108	0,46474	0,46849
	9	0,45399	0,46108	0,46475	0,46850
	10	0,45399	0,46109	0,46475	0,46850
	...	....	....	....	....
2e.	3	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	4	0,51635	0,51573	0,51565	0,51569
	5	0,51633	0,51923	0,52059	0,52189
	6	0,51750	0,52037	0,52173	0,52304
	7	0,51750	0,52062	0,52208	0,52349
	8	0,51758	0,52070	0,52216	0,52357
	9	0,51758	0,52072	0,52219	0,52360
	10	0,51759	0,52072	0,52220	0,52361
	11	0,51759	0,52073	0,52220	0,52361
	...	....	....	....	....
3e.	5	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	6	0,49998	0,50349	0,50490	0,50613
	7	0,50115	0,50462	0,50603	0,50726
	8	0,50115	0,50487	0,50638	0,50770
	9	0,50123	0,50495	0,50646	0,50778
	10	0,50123	0,50497	0,50648	0,50781
	11	0,50124	0,50497	0,50649	0,50782
	12	0,50124	0,50497	0,50649	0,50782
4e.	7	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	8	0,50117	0,50113	0,50113	0,50113
	9	0,50117	0,50138	0,50148	0,50157
	10	0,50126	0,50146	0,50156	0,50165
	11	0,50126	0,50148	0,50159	0,50169
	12	0,50126	0,50149	0,50159	0,50169
5e.	9	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	10	0,50000	0,50025	0,50035	0,50044
	11	0,50008	0,50033	0,50043	0,50052
	12	0,50008	0,50035	0,50046	0,50055
6e.	11	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000
	12	0,50008	0,50008	0,50008	0,50008

TABLEAU XIII. — Coefficients G des moments maxima négatifs, qui sont produits par la surcharge seule, vers le milieu des travées.

(Voir le n° 58.)

RANG de la travée.	NOMBRE n des travées.	COEFFICIENT G, POUR δ =							
		0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,25	1,3
1re.	3	0,0964	0,0982	0,0998	0,1013	0,1025	0,1037	0,1042	0,1047
	4	0,0915	0,0942	0,0969	0,0997	0,1025	0,1055	0,1071	0,1086
	5	0,0918	0,0945	0,0972	0,1001	0,1030	0,1061	0,1077	0,1094
	6	0,0915	0,0942	0,0970	0,1000	0,1030	0,1062	0,1079	0,1097
	7	0,0915	0,0943	0,0971	0,1000	0,1031	0,1063	0,1080	0,1097
	8	0,0915	0,0942	0,0971	0,1000	0,1030	0,1063	0,1080	0,1097
	...	......	......	......	......	......	......	......	......
2e.	3	0,0610	0,0568	0,0625	0,0750	0,0885	0,1029	0,1104	0,1182
	4	0,0463	0,0564	0,0678	0,0805	0,0944	0,1095	0,1175	0,1258
	5	0,0406	0,0521	0,0649	0,0790	0,0944	0,1110	0,1198	0,1289
	6	0,0410	0,0525	0,0653	0,0794	0,0948	0,1115	0,1204	0,1295
	7	0,0406	0,0522	0,0652	0,0793	0,0948	0,1117	0,1205	0,1297
	8	0,0406	0,0522	0,0651	0,0794	0,0949	0,1117	0,1206	0,1298
	...	......	......	......	......	......	......	......	......
3e.	5	0,0510	0,0610	0,0725	0,0855	0,1000	0,1159	0,1244	0,1332
	6	0,0462	0,0572	0,0699	0,0841	0,1000	0,1173	0,1266	0,1362
	7	0,0465	0,0576	0,0702	0,0845	0,1004	0,1178	0,1271	0,1368
	8	0,0462	0,0573	0,0701	0,0844	0,1004	0,1179	0,1273	0,1370
	9	0,0462	0,0573	0,0701	0,0844	0,1004	0,1179	0,1273	0,1370
	10	0,0462	0,0573	0,0701	0,0844	0,1004	0,1179	0,1273	0,1371
	...	......	......	......	......	......	......	......	......
4e.	7	0,0408	0,0532	0,0672	0,0827	0,1000	0,1188	0,1288	0,1392
	8	0,0412	0,0535	0,0675	0,0831	0,1004	0,1192	0,1293	0,1397
	9	0,0408	0,0532	0,0673	0,0830	0,1004	0,1193	0,1294	0,1399
	10	0,0408	0,0533	0,0673	0,0830	0,1004	0,1194	0,1295	0,1400
	11	0,0408	0,0532	0,0673	0,0830	0,1004	0,1194	0,1295	0,1400
	12	0,0408	0,0533	0,0673	0,0830	0,1004	0,1194	0,1295	0,1400
5e.	9	0,0416	0,0539	0,0679	0,0835	0,1008	0,1197	0,1298	0,1403
	10	0,0412	0,0536	0,0677	0,0834	0,1008	0,1198	0,1299	0,1405
	11	0,0412	0,0536	0,0677	0,0834	0,1008	0,1198	0,1300	0,1405
	12	0,0412	0,0536	0,0677	0,0834	0,1008	0,1198	0,1300	0,1406
6e.	11	0,0408	0,0533	0,0675	0,0833	0,1008	0,1199	0,1301	0,1407
	12	0,0409	0,0534	0,0675	0,0833	0,1008	0,1199	0,1301	0,1408

FORMULAIRE ANALYTIQUE.

DISPOSITION ET USAGE

DU

FORMULAIRE ANALYTIQUE.

Malgré l'inconvénient inévitable de tomber dans quelques répétitions, nous croyons devoir rappeler succinctement les définitions et théorèmes dont la connaissance est nécessaire pour faire usage de notre Formulaire analytique, afin d'épargner au lecteur la nécessité de les rechercher dans divers paragraphes de ce livre.

On suppose une poutre droite reposant sur $n+1$ appuis qu'on nomme, en les prenant dans l'ordre où ils se présentent à partir d'une culée,

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots,\ A_{n-1},\ A_n;$$

A_0 et A_n sont les deux culées, les autres indices se rapportent aux piles. La travée A_0A_1 est nommée *première travée;* A_1A_2 est la seconde, A_2A_3 la troisième, et ainsi de suite. Toutes les travées intermédiaires, depuis A_1A_2 jusqu'à $A_{n-2}A_{n-1}$ inclusivement, ont une même longueur c, distance des piles d'axe en axe; les deux extrêmes ont chacune une longueur b, qui peut différer de c. La lettre δ désigne le rapport $\frac{c}{b}$.

Tous les appuis sont censés former un polygone inscriptible dans la fibre moyenne de la poutre, celle-ci étant prise dans *l'état naturel,* alors qu'il n'existe encore ni déformation ni tension moléculaire. CETTE CONDITION EST DE RIGUEUR. (*Voir,* pour de plus amples explications, le n° 62.)

La charge permanente consiste en un poids uniformément réparti à raison de p kilogrammes par mètre courant; la surcharge peut couvrir un nombre arbitraire de travées choisies comme on voudra; elle est uniformément répartie sur les travées qu'elle embrasse, à raison de p' kilogrammes par mètre courant.

En raison de la symétrie, nous nous bornons toujours à chercher les moments de flexion dans la première moitié de

la pièce commençant à A_0. Ces moments sont définis dans le Formulaire en fonction d'une abscisse x, qui est la distance entre la section dont on s'occupe et le premier appui que l'on rencontre quand on va de cette section à l'appui-culée A_0. Ainsi, dans la première travée x désigne une distance comptée à partir de A_0; dans la seconde travée, une distance comptée à partir de A_1; dans la troisième, une distance comptée à partir de A_2, etc.

Chaque travée se partage en plusieurs régions. Dans toute travée intermédiaire nous distinguons cinq régions, séparées les unes des autres par quatre points dont les abscisses (rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite) sont désignées par x', x'', x''', x^{IV}. Nous ne reproduirons pas ici ce qui concerne la détermination des abscisses dont il s'agit : le lecteur devra pour cela recourir au § III du chapitre II, et spécialement au n° 48. Dans la première travée A_0A_1, on a

$$x' = x'' = x''' = 0,$$

de sorte que les cinq régions se réduisent à deux, l'une commençant à A_0 et s'étendant sur la longueur x^{IV}, l'autre formant le surplus de la travée.

Indépendamment de x', x'', x''', x^{IV}, il faut encore chercher dans chaque travée les abscisses x_1, x_2 des points où le moment de flexion produit par l'action isolée la charge permanente change de signe en passant par zéro. A cet égard, nous renvoyons aux n°s 37 et 43, ainsi qu'aux n°s 38, 39 et 40, où sont traités certains cas particuliers.

Du reste, on pourrait à la rigueur se dispenser de la détermination préalable des abscisses x', x'', x''', x^{IV}, x_1, x_2 de chaque travée : ces quantités s'obtiendraient tout naturellement, comme on le verra bientôt, en égalant les unes aux autres ou à zéro certaines fonctions de x à copier dans le Formulaire. Mais il n'est pas mauvais de conserver le second procédé comme moyen de vérification.

Cela posé, nous nommons encore :

X le moment de flexion produit, dans chaque section, par l'action isolée de la charge permanente;

X′ la limite positive, dans la même section, des moments produits par toutes les combinaisons possibles de surcharge, la charge permanente étant d'ailleurs supprimée;

X″ la limite négative des mêmes moments, qui par conséquent sont nécessairement compris entre les valeurs algébriques X′ et X″;

X‴ le plus grand moment de flexion, en valeur absolue, pouvant se produire dans la section dont il s'agit, sous l'action simultanée de la charge permanente et de la surcharge.

Nous avons démontré (nº 24) que le moment produit dans une section choisie à volonté, par la réunion de la charge permanente et de la surcharge, tombe nécessairement entre les sommes algébriques $X + X'$ et $X + X''$. Ces deux sommes peuvent être utiles à connaître si la section n'est pas symétrique relativement à l'axe de flexion, ou axe neutre; dans le cas contraire, on n'a besoin pour les calculs de résistance que de la plus grande des deux en valeur absolue, laquelle est justement ce que nous avons désigné par X‴. Sauf des cas très-rares et qui ne peuvent point se présenter si δ est compris entre 0,6180 et 2,6691, on a (nº 55) :

Dans la première travée.

Entre $x = 0$ et $x = x_2$............. $X''' = -(X + X'')$,
Entre $x = x_2$ et $x = b$............. $X''' = X + X'$.

Dans une travée intermédiaire quelconque.

Entre $x = 0$ et $x = x_1$ (*) } .... $X''' = X + X'$,
Entre $x = x_2$ et $x = c = b\delta$ }
Entre $x = x_1$ et $x = x_2$............. $X''' = -(X + X'')$.

Tout se réduit donc, comme on le voit, à trouver X, X′, X″. A cet effet, on recherchera dans le Formulaire :

1° Pour la première travée, trois fonctions de x désignées

(*) Dans notre système de notations, x_1 désigne toujours la plus petite des deux distances x_1, x_2, toutes deux racines d'une même équation du second degré.



par $F(x)$, $\psi_3(x)$, $f_5(x)$, qu'on choisira suivant la valeur du rapport δ(*) et le nombre n des travées;

2° Pour chacune des autres travées (en s'arrêtant au milieu de la poutre), quatre fonctions de x, savoir : $F(x)$, $f_1(x)$, $f_5(x)$, $\psi_3(x)$, qu'on choisira également suivant les valeurs de n, de δ, et aussi du rang de la travée en question.

Cela fait, il ne restera qu'à écrire la solution, consistant dans les résultats ci-dessous.

Première travée :

Entre $x = 0$ et $x = x^{\text{IV}}$.... $\begin{cases} X' = p'[F(x) - \psi_3(x)], \\ X'' = p'\psi_3(x). \end{cases}$

Entre $x = x^{\text{IV}}$ et $x = b$..... $\begin{cases} X' = p'f_5(x), \\ X'' = p'[F(x) - f_5(x)]. \end{cases}$

Dans toute la travée.......... $X = pF(x)$.

Deuxième, troisième, quatrième, ... travées.

Entre $x = 0$ et $x = x'$..... $\begin{cases} X' = p'f_1(x), \\ X'' = p'[F(x) - f_1(x)]. \end{cases}$

Entre $x = x'$ et $x = x''$..... $\begin{cases} X' = p'[F(x) - f_5(x)], \\ X'' = p'f_5(x). \end{cases}$

Entre $x = x''$ et $x = x'''$..... $\begin{cases} X' = p'[F(x) - \psi_3(x)], \\ X'' = p'\psi_3(x). \end{cases}$

Entre $x = x'''$ et $x = x^{\text{IV}}$.... $\begin{cases} X' = p'[F(x) - f_1(x)], \\ X'' = p'f_1(x). \end{cases}$

Entre $x = x^{\text{IV}}$ et $x = c$...... $\begin{cases} X' = p'f_5(x), \\ X'' = p'[F(x) - f_5(x)]. \end{cases}$

Dans toute la travée......... $X = pF(x)$.

On voit que dans toute travée intermédiaire il n'y a que

(*) Le Formulaire suppose que δ prenne l'une des huit valeurs

0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,25, 1,3.

Pour des valeurs intermédiaires, l'interpolation fournirait des résultats approximatifs.

sept fonctions différentes pour représenter successivement X, X′, X″ : quatre d'entre elles sont fournies directement par le Formulaire, et les autres s'obtiennent par des soustractions.

Quand il s'agit de la travée centrale d'une poutre ayant un nombre impair de travées, il devient inutile, en raison de la symétrie, de chercher les résultats relatifs à la quatrième et à la cinquième région : mais en réalité cela ne produit aucune simplification, car, sauf la permutation réciproque entre X′ et X″, la quatrième région ne diffère pas de la première, et la cinquième de la seconde.

Ayant X, X′, X″, on en déduit X‴ comme nous l'avons dit plus haut.

Le moyen de vérification que nous avons annoncé pour les abscisses x', x'', x''', x^{IV}, x_1, x_2 d'une travée quelconque, consisterait à poser, pour cette travée, les équations :

$F(x) = 0$, qui donnerait x_1 et x_2;

$f_1(x) = F(x) - f_6(x)$, qui donnerait x' et x^{IV};

$f_5(x) = \psi_3(x)$, dont l'unique racine serait x'';

$f_1(x) = \psi_3(x)$, ayant de même x''' pour seule racine.

Toutes les fonctions qu'on a déterminées étant du premier ou du second degré en x, il est aisé de calculer leurs valeurs pour certains points particuliers, leurs maxima, etc.

Pour un exemple numérique montrant l'application de la méthode qu'on vient d'indiquer, *voir* au n° 56.

Nous n'avons pas cru devoir nous occuper beaucoup de la recherche des efforts tranchants : toutefois, si l'on avait des motifs pour y attacher quelque importance, on pourrait procéder comme il est dit dans la note qui termine le chapitre premier (page 123).

Quant à la disposition du Formulaire, elle est très-simple et se comprend d'elle-même : il suffira donc d'en dire quelques mots. On y trouve, à la suite l'une de l'autre, quatre séries principales de formules destinées à faire connaître respectivement les quatre fonctions $F(x)$, $f_1(x)$, $f_6(x)$, $\psi_3(x)$, en ne conservant sous forme algébrique ou littérale que la variable x et la longueur b d'une travée extrême. Pour la première tra-

vée $f_1(x)$ n'existe pas, et en conséquence ne figure pas dans le Formulaire; pour les autres (jusqu'au milieu de la poutre) on trouve les quatre fonctions. Chaque série principale de formules, relative à une même fonction, se subdivise elle-même en un certain nombre de séries secondaires, dont chacune se rapporte à une seule travée; dans la série secondaire de chaque travée il y a subdivision en un certain nombre de groupes, dont chacun convient à une des valeurs que peut prendre le nombre total n des travées de la poutre; enfin la dernière subdivision se fait par les huit valeurs distinctes du nombre δ, rapport entre les longueurs d'une travée intermédiaire et d'une travée extrême. Cela détermine complétement la fonction dont on s'occupe. Exemple : On demande $f_1(x)$ dans la quatrième travée d'une poutre à neuf travées, pour laquelle δ serait égal à 1,2. Dans la série spéciale à $f_1(x)$, on prendra la série secondaire relative à la quatrième travée; dans cette série secondaire, on prendra le groupe relatif à $n=9$; en regard de $\delta=1,2$, sur la même ligne horizontale, on lira

$$f_1(x)=0,162387\,b^2-0,708091\,bx+0,5x^2.$$

On procéderait toujours d'une manière analogue.

Notre Formulaire analytique ne contient pas moins de 1200 formules applicables à 80 poutres différentes, qui constituent un total de 320 travées; et cela tout en laissant dans l'indétermination les valeurs numériques des poids p et p' par mètre courant, ainsi que de la longueur b des travées extrêmes, lesquelles valeurs peuvent être absolument quelconques.

Les nombres décimaux approximatifs ne sont donnés que jusqu'à la sixième décimale inclusivement; et encore, d'après le procédé de calcul employé, cette dernière n'est-elle souvent exacte qu'à une ou deux unités près. Mais on conviendra sans peine que des erreurs portant sur les millionièmes de pb^2 ou $p'b^2$ sont tout à fait insignifiantes dans les applications; car les moments maxima atteignent, pour le moins, aux environs du dixième des mêmes quantités.

VALEURS DE $F(x) = \frac{X}{p}$.

Première travée.

$n = 3$,	$\delta = 0{,}7\ldots$	$F(x) = -0{,}418110\,bx + 0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}414091\,bx + 0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}408032\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}400000\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}390047\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}378214\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}371603\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}364534\,bx + 0{,}5x^2$
$n = 4$,	$\delta = 0{,}7\ldots$	$F(x) = -0{,}403975\,bx + 0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}401875\,bx + 0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}398172\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}392857\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}385925\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}377368\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}372479\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}367184\,bx + 0{,}5x^2$
$n = 5$,	$\delta = 0{,}7\ldots$	$F(x) = -0{,}407531\,bx + 0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}405000\,bx + 0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}400732\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}394737\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}387023\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}377596\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}372243\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}366463\,bx + 0{,}5x^2$
$n = 6$,	$\delta = 0{,}7\ldots$	$F(x) = -0{,}406562\,bx + 0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}404153\,bx + 0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}400040\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}394231\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}386728\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}377535\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}372306\,bx + 0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}366655\,bx + 0{,}5x^2$

Première travée (suite).

$n=7$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=-0,406821\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,404379\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,400225\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,394366\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,386807\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,377552\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,372289\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,366604\,bx+0,5x^2$
$n=8$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=-0,406751\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,404318\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,400176\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,394330\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,386786\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,377547\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,372294\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,366618\,bx+0,5x^2$
$n=9$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=-0,406770\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,404334\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,400189\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,394340\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,386791\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,377548\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,372292\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,366614\,bx+0,5x^2$
$n=10$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=-0,406765\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,404330\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,400185\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,394337\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,386790\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,377548\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,372293\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,366615\,bx+0,5x^2$

Première travée (suite).

$n=11$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=-0,406766\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,404331\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,400186\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,394338\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,386790\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,377548\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,372293\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,366615\,bx+0,5x^2$

$n=12$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=-0,406766\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,404331\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,400186\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,394338\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,386790\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,377548\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,372293\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,366615\,bx+0,5x^2$

Deuxième travée.

$n=3$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,081890\,b^2-0,350\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,085909\,b^2-0,400\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,091968\,b^2-0,450\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,100000\,b^2-0,500\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,109953\,b^2-0,550\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,121786\,b^2-0,600\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,128397\,b^2-0,625\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,135466\,b^2-0,650\,bx+0,5x^2$

$n=4$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,096025\,b^2-0,468267\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,098125\,b^2-0,483984\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,101828\,b^2-0,507213\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,107143\,b^2-0,535714\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,114075\,b^2-0,568057\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,122632\,b^2-0,603290\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,127521\,b^2-0,621775\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,132816\,b^2-0,640749\,bx+0,5x^2$

Deuxième travée (suite).

$n=5$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,092469\,b^2-0,438519\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,095000\,b^2-0,462500\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,099268\,b^2-0,492358\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,105263\,b^2-0,526316\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,112977\,b^2-0,563247\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,122404\,b^2-0,602404\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,127757\,b^2-0,622646\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,133537\,b^2-0,643265\,bx+0,5\,x^2$
$n=6$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,093438\,b^2-0,446620\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,095847\,b^2-0,468326\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,099960\,b^2-0,496371\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,105769\,b^2-0,528846\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,113272\,b^2-0,564539\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,122465\,b^2-0,602641\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,127694\,b^2-0,622414\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,133345\,b^2-0,642594\,bx+0,5\,x^2$
$n=7$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,093179\,b^2-0,444459\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,095621\,b^2-0,466770\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,099775\,b^2-0,495298\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,105634\,b^2-0,528169\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,113193\,b^2-0,564193\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,122448\,b^2-0,602577\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,127711\,b^2-0,622476\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,133396\,b^2-0,642774\,bx+0,5\,x^2$
$n=8$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,093249\,b^2-0,445039\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,095682\,b^2-0,467188\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,099824\,b^2-0,495586\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,105670\,b^2-0,528350\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,113214\,b^2-0,564285\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,122453\,b^2-0,602594\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,127706\,b^2-0,622459\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,133382\,b^2-0,642725\,bx+0,5\,x^2$

Deuxième travée (suite).

$n=9$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$F(x)=0{,}093230\,b^2-0{,}444883\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}095666\,b^2-0{,}467076\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}099811\,b^2-0{,}495509\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}105660\,b^2-0{,}528302\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}113209\,b^2-0{,}564261\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}122452\,b^2-0{,}602590\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}127708\,b^2-0{,}622464\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}133386\,b^2-0{,}642738\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=10$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$F(x)=0{,}093235\,b^2-0{,}444924\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}095670\,b^2-0{,}467106\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}099815\,b^2-0{,}495530\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}105663\,b^2-0{,}528315\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}113210\,b^2-0{,}564267\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}122452\,b^2-0{,}602591\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}127707\,b^2-0{,}622462\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}133385\,b^2-0{,}642735\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=11$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$F(x)=0{,}093234\,b^2-0{,}444914\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}095669\,b^2-0{,}467098\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}099814\,b^2-0{,}495524\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}105662\,b^2-0{,}528311\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}113210\,b^2-0{,}564266\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}122452\,b^2-0{,}602591\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}127707\,b^2-0{,}622463\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}133385\,b^2-0{,}642735\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=12$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$F(x)=0{,}093234\,b^2-0{,}444917\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}095669\,b^2-0{,}467100\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}099814\,b^2-0{,}495526\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}105662\,b^2-0{,}528312\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}113210\,b^2-0{,}564266\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}122452\,b^2-0{,}602591\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}127707\,b^2-0{,}622463\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}133385\,b^2-0{,}642735\,bx+0{,}5\,x^2$

Troisième travée.

$n=5$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,030506\,b^2-0,350\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,045000\,b^2-0,400\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,061146\,b^2-0,450\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,078947\,b^2-0,500\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,098405\,b^2-0,550\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,119519\,b^2-0,600\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,130699\,b^2-0,625\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,142293\,b^2-0,650\,bx+0,5\,x^2$
$n=6$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,025804\,b^2-0,317794\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,041186\,b^2-0,377224\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,058226\,b^2-0,434543\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,076923\,b^2-0,490385\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,097279\,b^2-0,545154\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,119296\,b^2-0,599120\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,130927\,b^2-0,625862\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,142973\,b^2-0,652468\,bx+0,5\,x^2$
$n=7$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,027058\,b^2-0,326386\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,042205\,b^2-0,383307\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,059007\,b^2-0,438676\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,077465\,b^2-0,492958\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,097581\,b^2-0,546452\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,119356\,b^2-0,599356\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,130866\,b^2-0,625631\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,142790\,b^2-0,651806\,bx+0,5\,x^2$
$n=8$,	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,026722\,b^2-0,324081\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,041932\,b^2-0,381676\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,058797\,b^2-0,437568\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,077320\,b^2-0,492268\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,097500\,b^2-0,546104\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,119340\,b^2-0,599292\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,130882\,b^2-0,625693\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,142839\,b^2-0,651984\,bx+0,5\,x^2$

Troisième travée (suite).

$n=9,$	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,026812\,b^2-0,324699\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,042005\,b^2-0,382114\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,058853\,b^2-0,437864\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,077358\,b^2-0,492452\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,097522\,b^2-0,546197\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,119344\,b^2-0,599309\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,130878\,b^2-0,625677\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,142826\,b^2-0,651936\,bx+0,5\,x^2$

$n=10,$	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,026788\,b^2-0,324533\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,041985\,b^2-0,381995\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,058838\,b^2-0,437784\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,077348\,b^2-0,492403\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,097516\,b^2-0,546172\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,119343\,b^2-0,599305\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,130879\,b^2-0,625681\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,142830\,b^2-0,651949\,bx+0,5\,x^2$

$n=11,$	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,026794\,b^2-0,324577\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,041991\,b^2-0,382027\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,058842\,b^2-0,437806\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,077351\,b^2-0,492417\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,097517\,b^2-0,546178\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,119343\,b^2-0,599306\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,130878\,b^2-0,625679\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,142829\,b^2-0,651946\,bx+0,5\,x^2$

$n=12,$	$\delta=0,7\ldots$	$F(x)=0,026792\,b^2-0,324564\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,041989\,b^2-0,382019\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,058841\,b^2-0,437800\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,077350\,b^2-0,492413\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,097517\,b^2-0,546177\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,119343\,b^2-0,599306\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,130878\,b^2-0,625679\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,142829\,b^2-0,651947\,bx+0,5\,x^2$

Quatrième travée.

$n=7,\ \delta=0{,}7\ldots\ F(x)=0{,}043588\,b^2-0{,}350\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\ \ 0{,}055559\,b^2-0{,}400\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\ \ 0{,}069199\,b^2-0{,}450\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\ \ 0{,}084507\,b^2-0{,}500\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\ \ 0{,}101484\,b^2-0{,}550\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\ \ 0{,}120129\,b^2-0{,}600\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\ \ 0{,}130077\,b^2-0{,}625\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\ \ 0{,}140442\,b^2-0{,}650\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=8,\ \delta=0{,}7\ldots\ F(x)=0{,}044865\,b^2-0{,}358640\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\ \ 0{,}056591\,b^2-0{,}406108\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\ \ 0{,}069986\,b^2-0{,}454143\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\ \ 0{,}085052\,b^2-0{,}502578\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\ \ 0{,}101786\,b^2-0{,}551299\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\ \ 0{,}120189\,b^2-0{,}600236\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\ \ 0{,}130016\,b^2-0{,}624769\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\ \ 0{,}140260\,b^2-0{,}649338\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=9,\ \delta=0{,}7\ldots\ F(x)=0{,}044523\,b^2-0{,}356326\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\ \ 0{,}056314\,b^2-0{,}404471\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\ \ 0{,}069775\,b^2-0{,}453033\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\ \ 0{,}084906\,b^2-0{,}501887\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\ \ 0{,}101705\,b^2-0{,}550951\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\ \ 0{,}120173\,b^2-0{,}600173\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\ \ 0{,}130032\,b^2-0{,}624830\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\ \ 0{,}140309\,b^2-0{,}649516\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=10,\ \delta=0{,}7\ldots\ F(x)=0{,}044615\,b^2-0{,}356946\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\ \ 0{,}056389\,b^2-0{,}404911\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\ \ 0{,}069832\,b^2-0{,}453331\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\ \ 0{,}084945\,b^2-0{,}502072\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\ \ 0{,}101727\,b^2-0{,}551045\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\ \ 0{,}120177\,b^2-0{,}600190\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\ \ 0{,}130028\,b^2-0{,}624814\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\ \ 0{,}140296\,b^2-0{,}649468\,bx+0{,}5\,x^2$

Quatrième travée (suite).

$n=11$, $\delta=0{,}7\ldots$	$F(x)=$	$0{,}044590\,b^2-0{,}356779\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}056369\,b^2-0{,}404793\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}069817\,b^2-0{,}453252\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}084934\,b^2-0{,}502022\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}101721\,b^2-0{,}551019\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}120176\,b^2-0{,}600185\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}130029\,b^2-0{,}624818\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}140299\,b^2-0{,}649481\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=12$, $\delta=0{,}7\ldots$	$F(x)=$	$0{,}044597\,b^2-0{,}356824\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}056374\,b^2-0{,}404824\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}069821\,b^2-0{,}453273\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}084937\,b^2-0{,}502035\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}101722\,b^2-0{,}551025\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}120176\,b^2-0{,}600186\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}130029\,b^2-0{,}624818\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}140298\,b^2-0{,}649478\,bx+0{,}5\,x^2$

Cinquième travée.

$n=9$, $\delta=0{,}7\ldots$	$F(x)=$	$0{,}040095\,b^2-0{,}350\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}052737\,b^2-0{,}400\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}067045\,b^2-0{,}450\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}083019\,b^2-0{,}500\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}100659\,b^2-0{,}550\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}119965\,b^2-0{,}600\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}130244\,b^2-0{,}625\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}140938\,b^2-0{,}650\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=10$, $\delta=0{,}7\ldots$	$F(x)=$	$0{,}039753\,b^2-0{,}347684\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}052460\,b^2-0{,}398363\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}066834\,b^2-0{,}448890\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}082873\,b^2-0{,}499309\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}100578\,b^2-0{,}549652\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}119949\,b^2-0{,}599937\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}130260\,b^2-0{,}625062\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}140987\,b^2-0{,}650177\,bx+0{,}5\,x^2$

Cinquième travée (suite).

$n = 11,\ \delta = 0{,}7\ldots\quad F(x) = 0{,}039845\,b^2 - 0{,}348306\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}052535\,b^2 - 0{,}398802\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}066890\,b^2 - 0{,}449187\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}082912\,b^2 - 0{,}499494\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}100600\,b^2 - 0{,}549745\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}119954\,b^2 - 0{,}599954\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\quad 0{,}130256\,b^2 - 0{,}625046\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}140974\,b^2 - 0{,}650130\,bx + 0{,}5\,x^2$

$n = 12,\ \delta = 0{,}7\ldots\quad F(x) = 0{,}039820\,b^2 - 0{,}348139\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}052515\,b^2 - 0{,}398685\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}066875\,b^2 - 0{,}449107\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}082902\,b^2 - 0{,}499445\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}100594\,b^2 - 0{,}549720\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}119953\,b^2 - 0{,}599949\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\quad 0{,}130257\,b^2 - 0{,}625050\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}140977\,b^2 - 0{,}650142\,bx + 0{,}5\,x^2$

Sixième travée.

$n = 11,\ \delta = 0{,}7\ldots\quad F(x) = 0{,}041031\,b^2 - 0{,}350\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}053493\,b^2 - 0{,}400\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}067622\,b^2 - 0{,}450\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}083418\,b^2 - 0{,}500\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}100880\,b^2 - 0{,}550\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}120009\,b^2 - 0{,}600\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\quad 0{,}130199\,b^2 - 0{,}625\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}140805\,b^2 - 0{,}650\,bx + 0{,}5\,x^2$

$n = 12,\ \delta = 0{,}7\ldots\quad F(x) = 0{,}041123\,b^2 - 0{,}350620\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}053567\,b^2 - 0{,}400439\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}067679\,b^2 - 0{,}450298\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}083457\,b^2 - 0{,}500185\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}100902\,b^2 - 0{,}550094\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}120014\,b^2 - 0{,}600017\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\quad 0{,}130195\,b^2 - 0{,}624984\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}140792\,b^2 - 0{,}649952\,bx + 0{,}5\,x^2$

VALEURS DE $f_1(x)$.

Première travée. — Cette fonction n'existe pas.

Deuxième travée.

$n=3$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_1(x)=0,097699\,b^2-0,482276\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,102143\,b^2-0,511607\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,108476\,b^2-0,545786\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,116667\,b^2-0,583333\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,126691\,b^2-0,623315\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,138527\,b^2-0,665104\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,145119\,b^2-0,686538\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,152158\,b^2-0,708275\,bx+0,5x^2$
$n=4$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_1(x)=0,101606\,b^2-0,514970\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,105903\,b^2-0,537457\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,112208\,b^2-0,567441\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,120536\,b^2-0,602679\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,130897\,b^2-0,641740\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,143301\,b^2-0,683672\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,150272\,b^2-0,705500\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,157755\,b^2-0,727813\,bx+0,5x^2$
$n=5$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_1(x)=0,098860\,b^2-0,491993\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,103605\,b^2-0,521657\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,110521\,b^2-0,557652\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,119617\,b^2-0,598086\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,130900\,b^2-0,641753\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,144375\,b^2-0,687847\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,151936\,b^2-0,711624\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,160046\,b^2-0,735812\,bx+0,5x^2$
$n=6$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_1(x)=0,099076\,b^2-0,493799\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,103824\,b^2-0,523162\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,110752\,b^2-0,558991\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,119872\,b^2-0,599359\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,131194\,b^2-0,643039\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,144725\,b^2-0,689209\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,152322\,b^2-0,713044\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,160473\,b^2-0,737302\,bx+0,5x^2$

Deuxième travée (suite).

n	δ	$f_1(x)$
$n=7,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_1(x)=0{,}098874\,b^2-0{,}492110\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}103655\,b^2-0{,}522003\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}110628\,b^2-0{,}558273\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}119804\,b^2-0{,}599021\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}131193\,b^2-0{,}643036\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}144803\,b^2-0{,}689511\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}152442\,b^2-0{,}713487\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}160639\,b^2-0{,}737882\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=8,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_1(x)=0{,}098889\,b^2-0{,}492236\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}103670\,b^2-0{,}522109\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}110644\,b^2-0{,}558368\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}119822\,b^2-0{,}599111\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}131214\,b^2-0{,}643128\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}144828\,b^2-0{,}689609\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}152470\,b^2-0{,}713590\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}160670\,b^2-0{,}737990\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=9,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_1(x)=0{,}098875\,b^2-0{,}492116\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}103658\,b^2-0{,}522025\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}110635\,b^2-0{,}558316\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}119817\,b^2-0{,}599087\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}131214\,b^2-0{,}643128\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}144834\,b^2-0{,}689631\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}152479\,b^2-0{,}713622\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}160682\,b^2-0{,}738032\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=10,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_1(x)=0{,}098876\,b^2-0{,}492124\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}103659\,b^2-0{,}522033\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}110636\,b^2-0{,}558322\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}119819\,b^2-0{,}599094\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}131216\,b^2-0{,}643135\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}144835\,b^2-0{,}689637\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}152481\,b^2-0{,}713630\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}160684\,b^2-0{,}738039\,bx+0{,}5\,x^2$

Deuxième travée (suite).

$n = 11$, $\delta = 0,7\ldots$ $f_1(x) = 0,098875\,b^2 - 0,492116\,bx + 0,5\,x^2$
0,8... $0,103658\,b^2 - 0,522026\,bx + 0,5\,x^2$
0,9... $0,110636\,b^2 - 0,558319\,bx + 0,5\,x^2$
1,0... $0,119818\,b^2 - 0,599092\,bx + 0,5\,x^2$
1,1... $0,131216\,b^2 - 0,643135\,bx + 0,5\,x^2$
1,2... $0,144836\,b^2 - 0,689639\,bx + 0,5\,x^2$
1,25.. $0,152481\,b^2 - 0,713631\,bx + 0,5\,x^2$
1,3... $0,160685\,b^2 - 0,738042\,bx + 0,5\,x^2$

$n = 12$, $\delta = 0,7\ldots$ $f_1(x) = 0,098875\,b^2 - 0,492116\,bx + 0,5\,x^2$
0,8... $0,103659\,b^2 - 0,522029\,bx + 0,5\,x^2$
0,9... $0,110636\,b^2 - 0,558320\,bx + 0,5\,x^2$
1,0... $0,119819\,b^2 - 0,599093\,bx + 0,5\,x^2$
1,1... $0,131216\,b^2 - 0,643135\,bx + 0,5\,x^2$
1,2... $0,144836\,b^2 - 0,689640\,bx + 0,5\,x^2$
1,25.. $0,152481\,b^2 - 0,713631\,bx + 0,5\,x^2$
1,3... $0,160685\,b^2 - 0,738042\,bx + 0,5\,x^2$

Troisième travée.

$n = 5$, $\delta = 0,7\ldots$ $f_1(x) = 0,058595\,b^2 - 0,437331\,bx + 0,5\,x^2$
0,8... $0,074144\,b^2 - 0,487250\,bx + 0,5\,x^2$
0,9... $0,091699\,b^2 - 0,538598\,bx + 0,5\,x^2$
1,0... $0,111244\,b^2 - 0,590909\,bx + 0,5\,x^2$
1,1... $0,132766\,b^2 - 0,643894\,bx + 0,5\,x^2$
1,2... $0,156253\,b^2 - 0,697361\,bx + 0,5\,x^2$
1,25.. $0,168731\,b^2 - 0,724234\,bx + 0,5\,x^2$
1,3... $0,181697\,b^2 - 0,751185\,bx + 0,5\,x^2$

$n = 6$, $\delta = 0,7\ldots$ $f_1(x) = 0,054972\,b^2 - 0,412516\,bx + 0,5\,x^2$
0,8... $0,071346\,b^2 - 0,470539\,bx + 0,5\,x^2$
0,9... $0,089779\,b^2 - 0,528433\,bx + 0,5\,x^2$
1,0... $0,110256\,b^2 - 0,586218\,bx + 0,5\,x^2$
1,1... $0,132769\,b^2 - 0,643906\,bx + 0,5\,x^2$
1,2... $0,157307\,b^2 - 0,701512\,bx + 0,5\,x^2$
1,25.. $0,170333\,b^2 - 0,730286\,bx + 0,5\,x^2$
1,3... $0,183863\,b^2 - 0,759043\,bx + 0,5\,x^2$

Troisième travée (suite).

n	δ	$f_1(x)$
$n=7$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_1(x)=0{,}055249\,b^2-0{,}414413\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}071608\,b^2-0{,}472103\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}090039\,b^2-0{,}529810\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}110529\,b^2-0{,}587513\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}133069\,b^2-0{,}645200\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}157651\,b^2-0{,}702867\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}170705\,b^2-0{,}731691\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}184267\,b^2-0{,}760509\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=8$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_1(x)=0{,}054986\,b^2-0{,}412613\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}071404\,b^2-0{,}470888\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}089899\,b^2-0{,}529069\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}110457\,b^2-0{,}587169\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}133069\,b^2-0{,}645199\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}157727\,b^2-0{,}703167\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}170821\,b^2-0{,}732130\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}184425\,b^2-0{,}761082\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=9$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_1(x)=0{,}055005\,b^2-0{,}412747\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}071423\,b^2-0{,}470999\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}089917\,b^2-0{,}529167\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}110476\,b^2-0{,}587261\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}133090\,b^2-0{,}645291\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}157752\,b^2-0{,}703264\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}170848\,b^2-0{,}732232\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}184454\,b^2-0{,}761188\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=10$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_1(x)=0{,}054987\,b^2-0{,}412619\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}071408\,b^2-0{,}470911\,bx+0{,}5\,x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}089907\,b^2-0{,}529113\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}110471\,b^2-0{,}587237\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}133090\,b^2-0{,}645291\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}157757\,b^2-0{,}703286\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}170856\,b^2-0{,}732263\,bx+0{,}5\,x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}184465\,b^2-0{,}761228\,bx+0{,}5\,x^2$

Troisième travée (suite).

$n = 11,\ \delta = 0,7\ldots\ f_1(x) = 0,054988\,b^2 - 0,412627\,bx + 0,5\,x^2$
$0,8\ldots\quad 0,071410\,b^2 - 0,470920\,bx + 0,5\,x^2$
$0,9\ldots\quad 0,089908\,b^2 - 0,529120\,bx + 0,5\,x^2$
$1,0\ldots\quad 0,110472\,b^2 - 0,587243\,bx + 0,5\,x^2$
$1,1\ldots\quad 0,133092\,b^2 - 0,645298\,bx + 0,5\,x^2$
$1,2\ldots\quad 0,157759\,b^2 - 0,703293\,bx + 0,5\,x^2$
$1,25\ldots\quad 0,170858\,b^2 - 0,732270\,bx + 0,5\,x^2$
$1,3\ldots\quad 0,184467\,b^2 - 0,761236\,bx + 0,5\,x^2$

$n = 12,\ \delta = 0,7\ldots\ f_1(x) = 0,054987\,b^2 - 0,412619\,bx + 0,5\,x^2$
$0,8\ldots\quad 0,071409\,b^2 - 0,470914\,bx + 0,5\,x^2$
$0,9\ldots\quad 0,089908\,b^2 - 0,529117\,bx + 0,5\,x^2$
$1,0\ldots\quad 0,110472\,b^2 - 0,587241\,bx + 0,5\,x^2$
$1,1\ldots\quad 0,133092\,b^2 - 0,645298\,bx + 0,5\,x^2$
$1,2\ldots\quad 0,157759\,b^2 - 0,703294\,bx + 0,5\,x^2$
$1,25\ldots\quad 0,170859\,b^2 - 0,732273\,bx + 0,5\,x^2$
$1,3\ldots\quad 0,184468\,b^2 - 0,761239\,bx + 0,5\,x^2$

Quatrième travée.

$n = 7,\ \delta = 0,7\ldots\ f_1(x) = 0,059435\,b^2 - 0,420599\,bx + 0,5\,x^2$
$0,8\ldots\quad 0,075561\,b^2 - 0,477218\,bx + 0,5\,x^2$
$0,9\ldots\quad 0,093882\,b^2 - 0,534213\,bx + 0,5\,x^2$
$1,0\ldots\quad 0,114394\,b^2 - 0,591464\,bx + 0,5\,x^2$
$1,1\ldots\quad 0,137090\,b^2 - 0,648887\,bx + 0,5\,x^2$
$1,2\ldots\quad 0,161967\,b^2 - 0,706436\,bx + 0,5\,x^2$
$1,25\ldots\quad 0,175223\,b^2 - 0,735246\,bx + 0,5\,x^2$
$1,3\ldots\quad 0,189022\,b^2 - 0,764075\,bx + 0,5\,x^2$

$n = 8,\ \delta = 0,7\ldots\ f_1(x) = 0,059717\,b^2 - 0,422506\,bx + 0,5\,x^2$
$0,8\ldots\quad 0,075826\,b^2 - 0,478789\,bx + 0,5\,x^2$
$0,9\ldots\quad 0,094145\,b^2 - 0,535596\,bx + 0,5\,x^2$
$1,0\ldots\quad 0,114668\,b^2 - 0,592761\,bx + 0,5\,x^2$
$1,1\ldots\quad 0,137391\,b^2 - 0,650182\,bx + 0,5\,x^2$
$1,2\ldots\quad 0,162311\,b^2 - 0,707791\,bx + 0,5\,x^2$
$1,25\ldots\quad 0,175594\,b^2 - 0,736650\,bx + 0,5\,x^2$
$1,3\ldots\quad 0,189425\,b^2 - 0,765540\,bx + 0,5\,x^2$

Quatrième travée (suite).

$n=9,\ \delta=0,7\ldots\ f_1(x)=0,059450\,b^2-0,420699\,bx+0,5\,x^2$
$0,8\ldots\ 0,075620\,b^2-0,477569\,bx+0,5\,x^2$
$0,9\ldots\ 0,094004\,b^2-0,534852\,bx+0,5\,x^2$
$1,0\ldots\ 0,114595\,b^2-0,592416\,bx+0,5\,x^2$
$1,1\ldots\ 0,137390\,b^2-0,650180\,bx+0,5\,x^2$
$1,2\ldots\ 0,162387\,b^2-0,708091\,bx+0,5\,x^2$
$1,25\ldots\ 0,175710\,b^2-0,737090\,bx+0,5\,x^2$
$1,3\ldots\ 0,189582\,b^2-0,766112\,bx+0,5\,x^2$

$n=10,\ \delta=0,7\ldots\ f_1(x)=0,059470\,b^2-0,420834\,bx+0,5\,x^2$
$0,8\ldots\ 0,075639\,b^2-0,477681\,bx+0,5\,x^2$
$0,9\ldots\ 0,094022\,b^2-0,534950\,bx+0,5\,x^2$
$1,0\ldots\ 0,114614\,b^2-0,592508\,bx+0,5\,x^2$
$1,1\ldots\ 0,137412\,b^2-0,650273\,bx+0,5\,x^2$
$1,2\ldots\ 0,162412\,b^2-0,708188\,bx+0,5\,x^2$
$1,25\ldots\ 0,175736\,b^2-0,737190\,bx+0,5\,x^2$
$1,3\ldots\ 0,189611\,b^2-0,766217\,bx+0,5\,x^2$

$n=11,\ \delta=0,7\ldots\ f_1(x)=0,059451\,b^2-0,420704\,bx+0,5\,x^2$
$0,8\ldots\ 0,075625\,b^2-0,477594\,bx+0,5\,x^2$
$0,9\ldots\ 0,094012\,b^2-0,534897\,bx+0,5\,x^2$
$1,0\ldots\ 0,114609\,b^2-0,592483\,bx+0,5\,x^2$
$1,1\ldots\ 0,137412\,b^2-0,650273\,bx+0,5\,x^2$
$1,2\ldots\ 0,162417\,b^2-0,708209\,bx+0,5\,x^2$
$1,25\ldots\ 0,175745\,b^2-0,737222\,bx+0,5\,x^2$
$1,3\ldots\ 0,189622\,b^2-0,766258\,bx+0,5\,x^2$

$n=12,\ \delta=0,7\ldots\ f_1(x)=0,059453\,b^2-0,420716\,bx+0,5\,x^2$
$0,8\ldots\ 0,075626\,b^2-0,477602\,bx+0,5\,x^2$
$0,9\ldots\ 0,094013\,b^2-0,534903\,bx+0,5\,x^2$
$1,0\ldots\ 0,114611\,b^2-0,592491\,bx+0,5\,x^2$
$1,1\ldots\ 0,137413\,b^2-0,650279\,bx+0,5\,x^2$
$1,2\ldots\ 0,162419\,b^2-0,708233\,bx+0,5\,x^2$
$1,25\ldots\ 0,175747\,b^2-0,737230\,bx+0,5\,x^2$
$1,3\ldots\ 0,189624\,b^2-0,766265\,bx+0,5\,x^2$

Cinquième travée.

$n=9$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_1(x)=0,056031\,b^2-0,415830\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,072993\,b^2-0,474402\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,092208\,b^2-0,532867\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,113676\,b^2-0,591503\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,137394\,b^2-0,650185\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,168362\,b^2-0,708901\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,177190\,b^2-0,738269\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,191579\,b^2-0,767641\,bx+0,5x^2$

$n=10$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_1(x)=0,055763\,b^2-0,414020\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,072787\,b^2-0,473079\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,092067\,b^2-0,532123\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,113603\,b^2-0,591158\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,137394\,b^2-0,650185\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,163438\,b^2-0,709202\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,177306\,b^2-0,738708\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,191736\,b^2-0,768212\,bx+0,5x^2$

$n=11$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_1(x)=0,055783\,b^2-0,414156\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,072805\,b^2-0,473189\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,092069\,b^2-0,532203\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,113623\,b^2-0,591251\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,137416\,b^2-0,650277\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,163463\,b^2-0,709299\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,177332\,b^2-0,738809\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,191765\,b^2-0,768318\,bx+0,5x^2$

$n=12$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_1(x)=0,055764\,b^2-0,414026\,bx+0,5x^2$
	$0,8\ldots$	$0,072791\,b^2-0,473103\,bx+0,5x^2$
	$0,9\ldots$	$0,092076\,b^2-0,532169\,bx+0,5x^2$
	$1,0\ldots$	$0,113618\,b^2-0,591227\,bx+0,5x^2$
	$1,1\ldots$	$0,137416\,b^2-0,650277\,bx+0,5x^2$
	$1,2\ldots$	$0,163469\,b^2-0,709321\,bx+0,5x^2$
	$1,25\ldots$	$0,177341\,b^2-0,738841\,bx+0,5x^2$
	$1,3\ldots$	$0,191776\,b^2-0,768359\,bx+0,5x^2$

Sixième travée.

$n=11,\ \delta=0,7\ldots\ f_1(x)=0,056045\,b^2-0,414531\,bx+0,5x^2$

$0,8\ldots\quad 0,073052\,b^2-0,473499\,bx+0,5x^2$

$0,9\ldots\quad 0,092330\,b^2-0,532494\,bx+0,5x^2$

$1,0\ldots\quad 0,113877\,b^2-0,591506\,bx+0,5x^2$

$1,1\ldots\quad 0,137695\,b^2-0,650531\,bx+0,5x^2$

$1,2\ldots\quad 0,163782\,b^2-0,709565\,bx+0,5x^2$

$1,25\ldots\quad 0,177676\,b^2-0,739084\,bx+0,5x^2$

$1,3\ldots\quad 0,192138\,b^2-0,768605\,bx+0,5x^2$

$n=12,\ \delta=0,7\ldots\ f_1(x)=0,056065\,b^2-0,414667\,bx+0,5x^2$

$0,8\ldots\quad 0,073071\,b^2-0,473611\,bx+0,5x^2$

$0,9\ldots\quad 0,092348\,b^2-0,532591\,bx+0,5x^2$

$1,0\ldots\quad 0,113897\,b^2-0,591599\,bx+0,5x^2$

$1,1\ldots\quad 0,137716\,b^2-0,650624\,bx+0,5x^2$

$1,2\ldots\quad 0,163807\,b^2-0,709662\,bx+0,5x^2$

$1,25\ldots\quad 0,177703\,b^2-0,739185\,bx+0,5x^2$

$1,3\ldots\quad 0,192167\,b^2-0,768710\,bx+0,5x^2$

VALEURS DE $f_5(x)$.

Première travée.

$n=3,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_5(x)=$	$-0{,}402301\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$		$-0{,}397857\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$		$-0{,}391524\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$		$-0{,}383333\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$		$-0{,}373309\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$		$-0{,}361473\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$		$-0{,}354881\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$		$-0{,}347842\,bx+0{,}5x^2$
$n=4,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_5(x)=$	$-0{,}398394\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$		$-0{,}394097\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$		$-0{,}387792\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$		$-0{,}379464\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$		$-0{,}369103\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$		$-0{,}356699\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$		$-0{,}349728\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$		$-0{,}342245\,bx+0{,}5x^2$
$n=5,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_5(x)=$	$-0{,}401140\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$		$-0{,}396395\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$		$-0{,}389479\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$		$-0{,}380383\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$		$-0{,}369100\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$		$-0{,}355625\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$		$-0{,}348064\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$		$-0{,}339954\,bx+0{,}5x^2$
$n=6,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$f_5(x)=$	$-0{,}400924\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$		$-0{,}396176\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$		$-0{,}389248\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$		$-0{,}380128\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$		$-0{,}368806\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$		$-0{,}355275\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$		$-0{,}347678\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$		$-0{,}339527\,bx+0{,}5x^2$

Première travée (suite).

$n=7,$	$\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=-0,401126\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,396345\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,389372\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,380196\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,368807\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,355197\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,347558\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,339361\,bx+0,5\,x^2$
$n=8,$	$\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=-0,401111\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,396330\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,389356\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,380178\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,368786\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,355172\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,347530\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,339330\,bx+0,5\,x^2$
$n=9,$	$\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=-0,401125\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,396342\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,389365\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,380183\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,368786\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,355166\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,347521\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,339318\,bx+0,5\,x^2$
$n=10,$	$\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=-0,401124\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$-0,396341\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$-0,389364\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$-0,380181\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$-0,368784\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$-0,355165\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$-0,347519\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$-0,339316\,bx+0,5\,x^2$

Première travée (suite).

$n=11$, $\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=$	$-0,401125\,bx+0,5x^2$
$0,8\ldots$		$-0,396342\,bx+0,5x^2$
$0,9\ldots$		$-0,389364\,bx+0,5x^2$
$1,0\ldots$		$-0,380182\,bx+0,5x^2$
$1,1\ldots$		$-0,368784\,bx+0,5x^2$
$1,2\ldots$		$-0,355164\,bx+0,5x^2$
$1,25\ldots$		$-0,347519\,bx+0,5x^2$
$1,3\ldots$		$-0,339315\,bx+0,5x^2$
$n=12$, $\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=$	$-0,401125\,bx+0,5x^2$
$0,8\ldots$		$-0,396341\,bx+0,5x^2$
$0,9\ldots$		$-0,389364\,bx+0,5x^2$
$1,0\ldots$		$-0,380181\,bx+0,5x^2$
$1,1\ldots$		$-0,368784\,bx+0,5x^2$
$1,2\ldots$		$-0,355164\,bx+0,5x^2$
$1,25\ldots$		$-0,347519\,bx+0,5x^2$
$1,3\ldots$		$-0,339315\,bx+0,5x^2$

Deuxième travée.

$n=3$, $\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=$	$0,005106\,b^2-0,217724\,bx+0,5x^2$
$0,8\ldots$		$0,012857\,b^2-0,288393\,bx+0,5x^2$
$0,9\ldots$		$0,022269\,b^2-0,354214\,bx+0,5x^2$
$1,0\ldots$		$0,033333\,b^2-0,416667\,bx+0,5x^2$
$1,1\ldots$		$0,046045\,b^2-0,476685\,bx+0,5x^2$
$1,2\ldots$		$0,060402\,b^2-0,534896\,bx+0,5x^2$
$1,25\ldots$		$0,068196\,b^2-0,563462\,bx+0,5x^2$
$1,3\ldots$		$0,076401\,b^2-0,591725\,bx+0,5x^2$
$n=4$, $\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=$	$0,014057\,b^2-0,292623\,bx+0,5x^2$
$0,8\ldots$		$0,020000\,b^2-0,337500\,bx+0,5x^2$
$0,9\ldots$		$0,027201\,b^2-0,382836\,bx+0,5x^2$
$1,0\ldots$		$0,035714\,b^2-0,428571\,bx+0,5x^2$
$1,1\ldots$		$0,045582\,b^2-0,474657\,bx+0,5x^2$
$1,2\ldots$		$0,056842\,b^2-0,521053\,bx+0,5x^2$
$1,25\ldots$		$0,063004\,b^2-0,544355\,bx+0,5x^2$
$1,3\ldots$		$0,069525\,b^2-0,567722\,bx+0,5x^2$

Deuxième travée (suite).

$n=5,\quad \delta=0{,}7\ldots\quad f_5(x)=0{,}013157\,b^2-0{,}285089\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}019079\,b^2-0{,}331169\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}026242\,b^2-0{,}377270\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}034689\,b^2-0{,}423445\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}044454\,b^2-0{,}469716\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}055567\,b^2-0{,}516095\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\quad 0{,}061637\,b^2-0{,}539325\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}068053\,b^2-0{,}562582\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=6,\quad \delta=0{,}7\ldots\quad f_5(x)=0{,}013903\,b^2-0{,}291330\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}019701\,b^2-0{,}335444\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}026697\,b^2-0{,}379909\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}034936\,b^2-0{,}424680\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}044453\,b^2-0{,}469713\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}055280\,b^2-0{,}514978\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\quad 0{,}061192\,b^2-0{,}537687\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}067441\,b^2-0{,}560445\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=7,\quad \delta=0{,}7\ldots\quad f_5(x)=0{,}013846\,b^2-0{,}290853\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}019643\,b^2-0{,}335044\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}026636\,b^2-0{,}379552\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}034868\,b^2-0{,}424339\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}044375\,b^2-0{,}469369\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}055186\,b^2-0{,}514613\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\quad 0{,}061089\,b^2-0{,}537307\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}067327\,b^2-0{,}560046\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=8,\quad \delta=0{,}7\ldots\quad f_6(x)=0{,}013900\,b^2-0{,}291306\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}019688\,b^2-0{,}335355\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}026669\,b^2-0{,}379744\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}034886\,b^2-0{,}424429\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}044375\,b^2-0{,}469369\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}055165\,b^2-0{,}514532\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots\quad 0{,}061057\,b^2-0{,}537189\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}067282\,b^2-0{,}559890\,bx+0{,}5\,x^2$

Deuxième travée (suite).

$n=9$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=0,013896\,b^2-0,291273\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,019684\,b^2-0,335326\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,026664\,b^2-0,379719\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,034881\,b^2-0,424405\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,044369\,b^2-0,469345\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,055159\,b^2-0,514506\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,061049\,b^2-0,537161\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,067274\,b^2-0,559862\,bx+0,5\,x^2$
$n=10$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=0,013900\,b^2-0,291304\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,019687\,b^2-0,335349\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,026667\,b^2-0,379733\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,034882\,b^2-0,424411\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,044369\,b^2-0,469345\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,055157\,b^2-0,514500\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,061047\,b^2-0,537153\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,067271\,b^2-0,559851\,bx+0,5\,x^2$
$n=11$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=0,013900\,b^2-0,291303\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,019687\,b^2-0,335346\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,026666\,b^2-0,379731\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,034882\,b^2-0,424410\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,044369\,b^2-0,469343\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,055157\,b^2-0,514498\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,061046\,b^2-0,537150\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,067270\,b^2-0,559848\,bx+0,5\,x^2$
$n=12$,	$\delta=0,7\ldots$	$f_5(x)=0,013900\,b^2-0,291304\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,019687\,b^2-0,335348\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,026667\,b^2-0,379732\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,034882\,b^2-0,424410\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,044369\,b^2-0,469343\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,055157\,b^2-0,514498\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,061046\,b^2-0,537150\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,067270\,b^2-0,559848\,bx+0,5\,x^2$

Troisième travée.

$n=5$,	$\delta=0{,}7$.	$f_5(x)=-0{,}002537\,b^2-0{,}262669\,bx+0{,}5\,x^2$
	0,8..	$+0{,}004344\,b^2-0{,}312750\,bx+0{,}5\,x^2$
	0,9..	$0{,}011961\,b^2-0{,}361402\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,0..	$0{,}020335\,b^2-0{,}409091\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,1..	$0{,}029483\,b^2-0{,}456106\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,2..	$0{,}039420\,b^2-0{,}502639\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,25.	$0{,}044688\,b^2-0{,}525766\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,3..	$0{,}050157\,b^2-0{,}548815\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=6$,	$\delta=0{,}7$..	$f_5(x)=-0{,}003728\,b^2-0{,}254511\,bx+0{,}5\,x^2$
	0,8..	$+0{,}003220\,b^2-0{,}306038\,bx+0{,}5\,x^2$
	0,9 .	$0{,}010867\,b^2-0{,}355611\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,0..	$0{,}019231\,b^2-0{,}403846\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,1..	$0{,}028327\,b^2-0{,}451128\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,2..	$0{,}038169\,b^2-0{,}497712\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,25.	$0{,}043373\,b^2-0{,}520798\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,3..	$0{,}048767\,b^2-0{,}543769\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=7$,	$\delta=0{,}7$..	$f_5(x)=-0{,}002758\,b^2-0{,}261153\,bx+0{,}5\,x^2$
	0,8..	$+0{,}003969\,b^2-0{,}310510\,bx+0{,}5\,x^2$
	0,9..	$0{,}011381\,b^2-0{,}358332\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,0..	$0{,}019495\,b^2-0{,}405101\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,1..	$0{,}028326\,b^2-0{,}451124\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,2..	$0{,}037887\,b^2-0{,}496600\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,25.	$0{,}042944\,b^2-0{,}519177\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,3..	$0{,}048187\,b^2-0{,}541665\,bx+0{,}5\,x^2$
$n=8$,	$\delta=0{,}7$..	$f_5(x)=-0{,}002833\,b^2-0{,}260643\,bx+0{,}5\,x^2$
	0,8..	$+0{,}003899\,b^2-0{,}310091\,bx+0{,}5\,x^2$
	0,9..	$0{,}011311\,b^2-0{,}357962\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,0..	$0{,}019422\,b^2-0{,}404754\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,1..	$0{,}028246\,b^2-0{,}450777\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,2..	$0{,}037795\,b^2-0{,}496237\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,25.	$0{,}042844\,b^2-0{,}518800\,bx+0{,}5\,x^2$
	1,3..	$0{,}048079\,b^2-0{,}541272\,bx+0{,}5\,x^2$

Troisième travée (suite).

n	δ	$f_5(x)$
$n=9$	$\delta=0,7$..	$=-0,002762\,b^2-0,261126\,bx+0,5x^2$
	0,8..	$+0,003953\,b^2-0,310416\,bx+0,5x^2$
	0,9..	$0,011349\,b^2-0,358161\,bx+0,5x^2$
	1,0..	$0,019441\,b^2-0,404846\,bx+0,5x^2$
	1,1..	$0,028246\,b^2-0,450778\,bx+0,5x^2$
	1,2..	$0,037774\,b^2-0,496156\,bx+0,5x^2$
	1,25.	$0,042813\,b^2-0,518682\,bx+0,5x^2$
	1,3..	$0,048037\,b^2-0,541119\,bx+0,5x^2$
$n=10$	$\delta=0,7$..	$=-0,002767\,b^2-0,261090\,bx+0,5x^2$
	0,8..	$+0,003948\,b^2-0,310386\,bx+0,5x^2$
	0,9..	$0,011344\,b^2-0,358136\,bx+0,5x^2$
	1,0..	$0,019436\,b^2-0,404822\,bx+0,5x^2$
	1,1..	$0,028240\,b^2-0,450753\,bx+0,5x^2$
	1,2..	$0,037768\,b^2-0,496130\,bx+0,5x^2$
	1,25.	$0,042806\,b^2-0,518656\,bx+0,5x^2$
	1,3..	$0,048029\,b^2-0,541091\,bx+0,5x^2$
$n=11$	$\delta=0,7$..	$=-0,002762\,b^2-0,261124\,bx+0,5x^2$
	0,8..	$+0,003952\,b^2-0,310409\,bx+0,5x^2$
	0,9..	$0,011346\,b^2-0,358149\,bx+0,5x^2$
	1,0..	$0,019438\,b^2-0,404829\,bx+0,5x^2$
	1,1..	$0,028240\,b^2-0,450753\,bx+0,5x^2$
	1,2..	$0,037766\,b^2-0,496124\,bx+0,5x^2$
	1,25.	$0,042804\,b^2-0,518647\,bx+0,5x^2$
	1,3..	$0,048026\,b^2-0,541080\,bx+0,5x^2$
$n=12$	$\delta=0,7$..	$=-0,002763\,b^2-0,261120\,bx+0,5x^2$
	0,8..	$+0,003952\,b^2-0,310407\,bx+0,5x^2$
	0,9..	$0,011346\,b^2-0,358148\,bx+0,5x^2$
	1,0..	$0,019437\,b^2-0,404826\,bx+0,5x^2$
	1,1..	$0,028240\,b^2-0,450752\,bx+0,5x^2$
	1,2..	$0,037766\,b^2-0,496122\,bx+0,5x^2$
	1,25.	$0,042803\,b^2-0,518645\,bx+0,5x^2$
	1,3..	$0,048025\,b^2-0,541078\,bx+0,5x^2$

Quatrième travée.

$n=7,\quad \delta=0,7\ldots\quad f_5(x)=0,010016\,b^2-0,279401\,bx+0,5\,x^2$
$0,8\ldots\quad 0,013787\,b^2-0,322782\,bx+0,5\,x^2$
$0,9\ldots\quad 0,018090\,b^2-0,365787\,bx+0,5\,x^2$
$1,0\ldots\quad 0,022930\,b^2-0,408536\,bx+0,5\,x^2$
$1,1\ldots\quad 0,028314\,b^2-0,451113\,bx+0,5\,x^2$
$1,2\ldots\quad 0,034244\,b^2-0,493564\,bx+0,5\,x^2$
$1,25\ldots\quad 0,037415\,b^2-0,514754\,bx+0,5\,x^2$
$1,3\ldots\quad 0,040724\,b^2-0,535925\,bx+0,5\,x^2$

$n=8,\quad \delta=0,7\ldots\quad f_5(x)=0,011003\,b^2-0,286077\,bx+0,5\,x^2$
$0,8\ldots\quad 0,014545\,b^2-0,327273\,bx+0,5\,x^2$
$0,9\ldots\quad 0,018608\,b^2-0,368513\,bx+0,5\,x^2$
$1,0\ldots\quad 0,023196\,b^2-0,409794\,bx+0,5\,x^2$
$1,1\ldots\quad 0,028313\,b^2-0,451108\,bx+0,5\,x^2$
$1,2\ldots\quad 0,033962\,b^2-0,492453\,bx+0,5\,x^2$
$1,25\ldots\quad 0,036988\,b^2-0,513135\,bx+0,5\,x^2$
$1,3\ldots\quad 0,040147\,b^2-0,533824\,bx+0,5\,x^2$

$n=9,\quad \delta=0,7\ldots\quad f_5(x)=0,010928\,b^2-0,285567\,bx+0,5\,x^2$
$0,8\ldots\quad 0,014474\,b^2-0,326851\,bx+0,5\,x^2$
$0,9\ldots\quad 0,018538\,b^2-0,368144\,bx+0,5\,x^2$
$1,0\ldots\quad 0,023122\,b^2-0,409446\,bx+0,5\,x^2$
$1,1\ldots\quad 0,028232\,b^2-0,450762\,bx+0,5\,x^2$
$1,2\ldots\quad 0,033870\,b^2-0,492090\,bx+0,5\,x^2$
$1,25\ldots\quad 0,036888\,b^2-0,512758\,bx+0,5\,x^2$
$1,3\ldots\quad 0,040039\,b^2-0,533431\,bx+0,5\,x^2$

$n=10,\quad \delta=0,7\ldots\quad f_5(x)=0,010999\,b^2-0,286051\,bx+0,5\,x^2$
$0,8\ldots\quad 0,014530\,b^2-0,327179\,bx+0,5\,x^2$
$0,9\ldots\quad 0,018576\,b^2-0,368343\,bx+0,5\,x^2$
$1,0\ldots\quad 0,023142\,b^2-0,409539\,bx+0,5\,x^2$
$1,1\ldots\quad 0,028232\,b^2-0,450762\,bx+0,5\,x^2$
$1,2\ldots\quad 0,033850\,b^2-0,492010\,bx+0,5\,x^2$
$1,25\ldots\quad 0,036857\,b^2-0,512641\,bx+0,5\,x^2$
$1,3\ldots\quad 0,039997\,b^2-0,533278\,bx+0,5\,x^2$

Quatrième travée (suite).

$n=11,\ \delta=0{,}7\ldots$	$f_5(x)=$	$0{,}010994\,b^2-0{,}286016\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}014525\,b^2-0{,}327150\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}018571\,b^2-0{,}368336\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}023137\,b^2-0{,}409514\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}028227\,b^2-0{,}450737\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}033843\,b^2-0{,}491983\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}036850\,b^2-0{,}512614\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}039989\,b^2-0{,}533249\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=12,\ \delta=0{,}7\ldots$	$f_5(x)=$	$0{,}010999\,b^2-0{,}286050\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}014528\,b^2-0{,}327171\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}018573\,b^2-0{,}368330\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}023138\,b^2-0{,}409520\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}028227\,b^2-0{,}450737\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}033842\,b^2-0{,}491978\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}036848\,b^2-0{,}512606\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}039986\,b^2-0{,}533238\,bx+0{,}5\,x^2$

Cinquième travée.

$n=9,\ \delta=0{,}7\ldots$	$f_5(x)=$	$0{,}009950\,b^2-0{,}284170\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}013471\,b^2-0{,}325598\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}017628\,b^2-0{,}367133\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}022173\,b^2-0{,}408497\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}027190\,b^2-0{,}449815\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}032681\,b^2-0{,}491099\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}035604\,b^2-0{,}511731\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}038646\,b^2-0{,}532359\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=10,\ \delta=0{,}7\ldots$	$f_5(x)=$	$0{,}009875\,b^2-0{,}283660\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}913484\,b^2-0{,}325282\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}017558\,b^2-0{,}366763\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}022099\,b^2-0{,}408149\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}027109\,b^2-0{,}449467\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}032588\,b^2-0{,}490735\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}035504\,b^2-0{,}511355\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}038538\,b^2-0{,}531967\,bx+0{,}5\,x^2$

Cinquième travée (suite).

$n = 11,\ \delta = 0{,}7 \ldots\ f_5(x) = 0{,}009947\,b^2 - 0{,}284146\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}8 \ldots\ 0{,}013539\,b^2 - 0{,}325609\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}9 \ldots\ 0{,}017596\,b^2 - 0{,}366962\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}0 \ldots\ 0{,}022119\,b^2 - 0{,}408242\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}1 \ldots\ 0{,}027109\,b^2 - 0{,}449467\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}2 \ldots\ 0{,}032568\,b^2 - 0{,}490655\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}25 \ldots\ 0{,}035473\,b^2 - 0{,}511238\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}3 \ldots\ 0{,}038496\,b^2 - 0{,}531814\,bx + 0{,}5\,x^2$

$n = 12,\ \delta = 0{,}7 \ldots\ f_5(x) = 0{,}009941\,b^2 - 0{,}284109\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}8 \ldots\ 0{,}013534\,b^2 - 0{,}325579\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}9 \ldots\ 0{,}017591\,b^2 - 0{,}366937\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}0 \ldots\ 0{,}022114\,b^2 - 0{,}408217\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}1 \ldots\ 0{,}027104\,b^2 - 0{,}449444\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}2 \ldots\ 0{,}032561\,b^2 - 0{,}490628\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}25 \ldots\ 0{,}035466\,b^2 - 0{,}511210\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}3 \ldots\ 0{,}038488\,b^2 - 0{,}531785\,bx + 0{,}5\,x^2$

Sixième travée.

$n = 11,\ \delta = 0{,}7 \ldots\ f_5(x) = 0{,}010873\,b^2 - 0{,}285469\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}8 \ldots\ 0{,}014253\,b^2 - 0{,}326501\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}9 \ldots\ 0{,}018085\,b^2 - 0{,}367506\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}0 \ldots\ 0{,}022371\,b^2 - 0{,}408494\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}1 \ldots\ 0{,}027111\,b^2 - 0{,}449469\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}2 \ldots\ 0{,}032304\,b^2 - 0{,}490435\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}25 \ldots\ 0{,}035071\,b^2 - 0{,}510916\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}3 \ldots\ 0{,}037952\,b^2 - 0{,}531395\,bx + 0{,}5\,x^2$

$n = 12,\ \delta = 0{,}7 \ldots\ f_5(x) = 0{,}010945\,b^2 - 0{,}285953\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}8 \ldots\ 0{,}014308\,b^2 - 0{,}326828\,bx + 0{,}5\,x^2$
$0{,}9 \ldots\ 0{,}018123\,b^2 - 0{,}367706\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}0 \ldots\ 0{,}022391\,b^2 - 0{,}408586\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}1 \ldots\ 0{,}027111\,b^2 - 0{,}449469\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}2 \ldots\ 0{,}032284\,b^2 - 0{,}490355\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}25 \ldots\ 0{,}035040\,b^2 - 0{,}510798\,bx + 0{,}5\,x^2$
$1{,}3 \ldots\ 0{,}037910\,b^2 - 0{,}531242\,bx + 0{,}5\,x^2$

VALEURS DE $\psi_3(x)$.

Première travée.

$n=3$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=-0{,}439024\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}443182\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}446809\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}450000\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}452830\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}455357\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}456522\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}457627\,bx+0{,}5x^2$
$n=4$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=-0{,}427833\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}433993\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}440171\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}446429\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}452814\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}459366\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}462715\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}466119\,bx+0{,}5x^2$
$n=5$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=-0{,}428574\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}434767\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}441008\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}447368\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}453907\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}460673\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}464154\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}467707\,bx+0{,}5x^2$
$n=6$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=-0{,}427816\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}434135\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}440545\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}447115\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}453905\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}460963\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}464605\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}468328\,bx+0{,}5x^2$

Première travée (suite).

$n=7,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=-0{,}427872\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}434193\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}440606\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}447183\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}453984\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}461057\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}464708\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}468443\,bx+0{,}5x^2$
$n=8,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=-0{,}427818\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}434147\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}440572\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}447165\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}453984\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}461077\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}464741\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}468487\,bx+0{,}5x^2$
$n=9,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=-0{,}427822\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}434151\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}440577\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}447170\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}453989\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}461084\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}464748\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}468495\,bx+0{,}5x^2$
$n=10,$	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=-0{,}427818\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$-0{,}434148\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$-0{,}440574\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$-0{,}447169\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$-0{,}453989\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$-0{,}461086\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$-0{,}464750\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$-0{,}468499\,bx+0{,}5x^2$

Première travée (suite).

$n = 11,\ \delta = 0,7 \ldots\ \psi_3(x) = -0,427819\,bx + 0,5\,x^2$
$0,8 \ldots\ -0,434148\,bx + 0,5\,x^2$
$0,9 \ldots\ -0,440575\,bx + 0,5\,x^2$
$1,0 \ldots\ -0,447169\,bx + 0,5\,x^2$
$1,1 \ldots\ -0,453990\,bx + 0,5\,x^2$
$1,2 \ldots\ -0,461086\,bx + 0,5\,x^2$
$1,25 \ldots\ -0,464751\,bx + 0,5\,x^2$
$1,3 \ldots\ -0,468499\,bx + 0,5\,x^2$

$n = 12,\ \delta = 0,7 \ldots\ \psi_3(x) = -0,427818\,bx + 0,5\,x^2$
$0,8 \ldots\ -0,434148\,bx + 0,5\,x^2$
$0,9 \ldots\ -0,440575\,bx + 0,5\,x^2$
$1,0 \ldots\ -0,447169\,bx + 0,5\,x^2$
$1,1 \ldots\ -0,453990\,bx + 0,5\,x^2$
$1,2 \ldots\ -0,461086\,bx + 0,5\,x^2$
$1,25 \ldots\ -0,464751\,bx + 0,5\,x^2$
$1,3 \ldots\ -0,468499\,bx + 0,5\,x^2$

Deuxième travée.

$n = 3,\ \delta = 0,7 \ldots\ \psi_3(x) = 0,020915\,b^2 - 0,350\,bx + 0,5\,x^2$
$0,8 \ldots\ 0,029091\,b^2 - 0,400\,bx + 0,5\,x^2$
$0,9 \ldots\ 0,038777\,b^2 - 0,450\,bx + 0,5\,x^2$
$1,0 \ldots\ 0,050000\,b^2 - 0,500\,bx + 0,5\,x^2$
$1,1 \ldots\ 0,062783\,b^2 - 0,550\,bx + 0,5\,x^2$
$1,2 \ldots\ 0,077143\,b^2 - 0,600\,bx + 0,5\,x^2$
$1,25 \ldots\ 0,084918\,b^2 - 0,625\,bx + 0,5\,x^2$
$1,3 \ldots\ 0,093093\,b^2 - 0,650\,bx + 0,5\,x^2$

$n = 4,\ \delta = 0,7 \ldots\ \psi_3(x) = 0,023858\,b^2 - 0,374627\,bx + 0,5\,x^2$
$0,8 \ldots\ 0,032118\,b^2 - 0,420811\,bx + 0,5\,x^2$
$0,9 \ldots\ 0,042000\,b^2 - 0,468702\,bx + 0,5\,x^2$
$1,0 \ldots\ 0,053571\,b^2 - 0,517857\,bx + 0,5\,x^2$
$1,1 \ldots\ 0,066889\,b^2 - 0,567985\,bx + 0,5\,x^2$
$1,2 \ldots\ 0,081998\,b^2 - 0,618880\,bx + 0,5\,x^2$
$1,25 \ldots\ 0,090236\,b^2 - 0,644568\,bx + 0,5\,x^2$
$1,3 \ldots\ 0,098935\,b^2 - 0,670395\,bx + 0,5\,x^2$

Deuxième travée (suite).

$n=5,\quad \delta=0{,}7\ldots\quad \psi_3(x)=0{,}021043\,b^2-0{,}351074\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}029767\,b^2-0{,}404650\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}040276\,b^2-0{,}458701\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}052632\,b^2-0{,}513158\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}066884\,b^2-0{,}567965\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}083077\,b^2-0{,}623077\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25.\quad 0{,}091912\,b^2-0{,}650735\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}101244\,b^2-0{,}678456\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=6,\quad \delta=0{,}7\ldots\quad \psi_3(x)=0{,}021254\,b^2-0{,}352837\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}029983\,b^2-0{,}406130\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}040504\,b^2-0{,}460024\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}052885\,b^2-0{,}514423\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}067177\,b^2-0{,}569248\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}083428\,b^2-0{,}624441\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25..\quad 0{,}092298\,b^2-0{,}652158\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}101672\,b^2-0{,}679951\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=7,\quad \delta=0{,}7\ldots\quad \psi_3(x)=0{,}021052\,b^2-0{,}351146\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}029814\,b^2-0{,}404969\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}040380\,b^2-0{,}459306\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}052817\,b^2-0{,}514085\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}067177\,b^2-0{,}569246\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}083505\,b^2-0{,}624742\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25..\quad 0{,}092419\,b^2-0{,}652602\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}101839\,b^2-0{,}680532\,bx+0{,}5\,x^2$

$n=8,\quad \delta=0{,}7\ldots\quad \psi_3(x)=0{,}021067\,b^2-0{,}351273\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}8\ldots\quad 0{,}029829\,b^2-0{,}405075\,bx+0{,}5\,x^2$
$0{,}9\ldots\quad 0{,}040397\,b^2-0{,}459401\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}0\ldots\quad 0{,}052835\,b^2-0{,}514175\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}1\ldots\quad 0{,}067198\,b^2-0{,}569338\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}2\ldots\quad 0{,}083530\,b^2-0{,}624840\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}25..\quad 0{,}092447\,b^2-0{,}652705\,bx+0{,}5\,x^2$
$1{,}3\ldots\quad 0{,}101869\,b^2-0{,}680638\,bx+0{,}5\,x^2$

Deuxième travée (suite).

n	δ	$\psi_3(x)$
$n=9$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=0{,}021052\,b^2-0{,}351150\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}029817\,b^2-0{,}404991\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}040388\,b^2-0{,}459349\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}052830\,b^2-0{,}514151\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}067198\,b^2-0{,}569338\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}083536\,b^2-0{,}624862\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}092456\,b^2-0{,}652737\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}101881\,b^2-0{,}680680\,bx+0{,}5x^2$
$n=10$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=0{,}021053\,b^2-0{,}351160\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}029818\,b^2-0{,}404999\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}040389\,b^2-0{,}459356\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}052831\,b^2-0{,}514157\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}067199\,b^2-0{,}569345\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}083538\,b^2-0{,}624869\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}092458\,b^2-0{,}652744\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}101884\,b^2-0{,}680688\,bx+0{,}5x^2$
$n=11$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=0{,}021052\,b^2-0{,}351151\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}029817\,b^2-0{,}404993\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}040388\,b^2-0{,}459352\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}052831\,b^2-0{,}514156\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}067199\,b^2-0{,}569345\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}083538\,b^2-0{,}624870\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}092458\,b^2-0{,}652746\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}101884\,b^2-0{,}680691\,bx+0{,}5x^2$
$n=12$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=0{,}021052\,b^2-0{,}351151\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}029817\,b^2-0{,}404994\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}040388\,b^2-0{,}459352\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}052831\,b^2-0{,}514156\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}067200\,b^2-0{,}569345\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}083538\,b^2-0{,}624871\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}092458\,b^2-0{,}652746\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}101885\,b^2-0{,}680692\,bx+0{,}5x$

Troisième travée.

$n=5$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=0{,}010215\,b^2-0{,}350\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}018953\,b^2-0{,}400\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}028702\,b^2-0{,}450\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}039474\,b^2-0{,}500\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}051281\,b^2-0{,}550\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}064135\,b^2-0{,}600\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}070956\,b^2-0{,}625\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}078041\,b^2-0{,}650\,bx+0{,}5x^2$
$n=6$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=0{,}006536\,b^2-0{,}324803\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}016108\,b^2-0{,}383006\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}026744\,b^2-0{,}439639\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}038462\,b^2-0{,}495193\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}051275\,b^2-0{,}549973\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}065197\,b^2-0{,}604184\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}072576\,b^2-0{,}631121\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}080236\,b^2-0{,}657965\,bx+0{,}5x^2$
$n=7$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=0{,}006809\,b^2-0{,}326673\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}016366\,b^2-0{,}384549\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}027001\,b^2-0{,}441001\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}038732\,b^2-0{,}496478\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}051575\,b^2-0{,}551264\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}065541\,b^2-0{,}605541\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}072950\,b^2-0{,}632532\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}080643\,b^2-0{,}659440\,bx+0{,}5x^2$
$n=8$,	$\delta=0{,}7\ldots$	$\psi_3(x)=0{,}006545\,b^2-0{,}324870\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}8\ldots$	$0{,}016163\,b^2-0{,}383334\,bx+0{,}5x^2$
	$0{,}9\ldots$	$0{,}026861\,b^2-0{,}440259\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}0\ldots$	$0{,}038660\,b^2-0{,}496134\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}1\ldots$	$0{,}051574\,b^2-0{,}551261\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}2\ldots$	$0{,}065618\,b^2-0{,}605842\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}25\ldots$	$0{,}073066\,b^2-0{,}632971\,bx+0{,}5x^2$
	$1{,}3\ldots$	$0{,}080801\,b^2-0{,}660012\,bx+0{,}5x^2$

Troisième travée (suite).

$n=9,$	$\delta=0,7\ldots$	$\psi_3(x)=0,006565\,b^2-0,325004\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,016181\,b^2-0,383444\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,026880\,b^2-0,440358\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,038679\,b^2-0,496226\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,051596\,b^2-0,551355\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,065642\,b^2-0,605939\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,073093\,b^2-0,633073\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,080830\,b^2-0,660118\,bx+0,5\,x^2$
$n=10,$	$\delta=0,7\ldots$	$\psi_3(x)=0,006546\,b^2-0,324876\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,016167\,b^2-0,383357\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,026870\,b^2-0,440304\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,038674\,b^2-0,496202\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,051596\,b^2-0,551354\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,065648\,b^2-0,605961\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,073101\,b^2-0,633104\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,080841\,b^2-0,660159\,bx+0,5\,x^2$
$n=11,$	$\delta=0,7\ldots$	$\psi_3(x)=0,006548\,b^2-0,324886\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,016168\,b^2-0,383365\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,026871\,b^2-0,440311\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,038675\,b^2-0,496208\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,051597\,b^2-0,551360\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,065650\,b^2-0,605968\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,073103\,b^2-0,633111\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,080843\,b^2-0,660167\,bx+0,5\,x^2$
$n=12,$	$\delta=0,7\ldots$	$\psi_3(x)=0,006546\,b^2-0,324876\,bx+0,5\,x^2$
	$0,8\ldots$	$0,016167\,b^2-0,383359\,bx+0,5\,x^2$
	$0,9\ldots$	$0,026870\,b^2-0,440307\,bx+0,5\,x^2$
	$1,0\ldots$	$0,038675\,b^2-0,496206\,bx+0,5\,x^2$
	$1,1\ldots$	$0,051597\,b^2-0,551360\,bx+0,5\,x^2$
	$1,2\ldots$	$0,065650\,b^2-0,605969\,bx+0,5\,x^2$
	$1,25\ldots$	$0,073104\,b^2-0,633114\,bx+0,5\,x^2$
	$1,3\ldots$	$0,080844\,b^2-0,660170\,bx+0,5\,x^2$

Cinquième travée (suite).

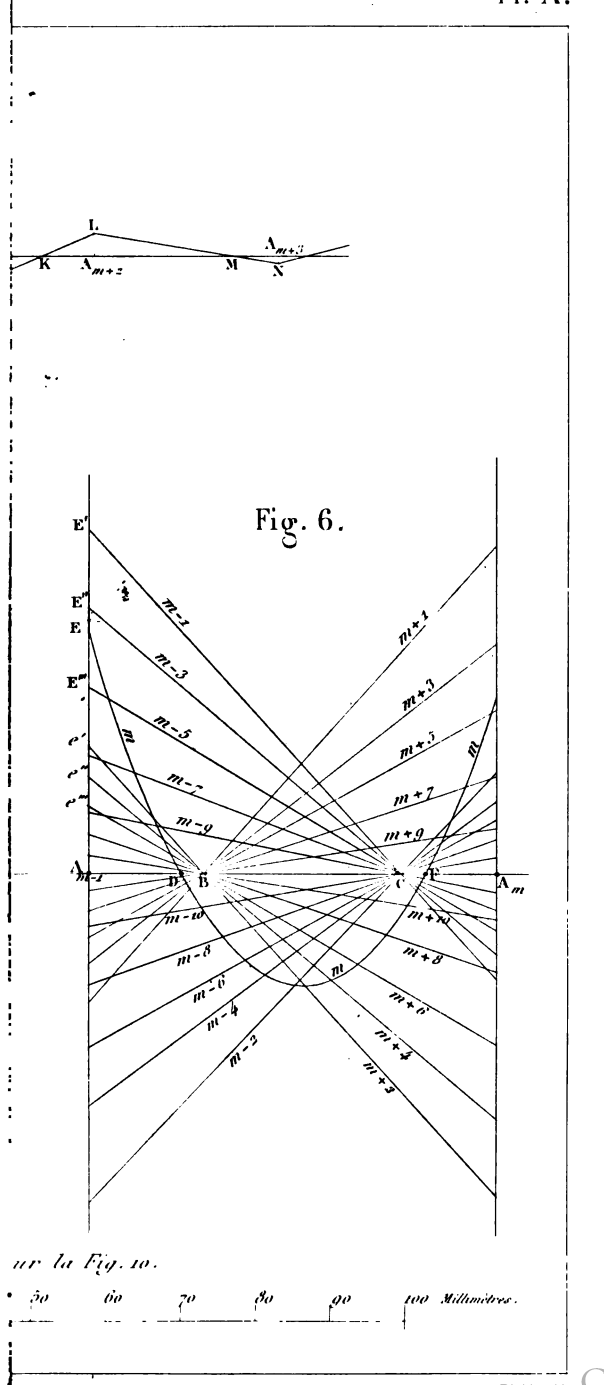
$n = 11,\ \delta = 0{,}7\ldots$	$\psi_3(x) =$	$0{,}019440\,b^2 - 0{,}348326\,bx + 0{,}5x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}025927\,b^2 - 0{,}398890\,bx + 0{,}5x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}033266\,b^2 - 0{,}449354\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}041456\,b^2 - 0{,}499747\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}050500\,b^2 - 0{,}550091\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}060398\,b^2 - 0{,}600398\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}065667\,b^2 - 0{,}625540\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}071151\,b^2 - 0{,}650678\,bx + 0{,}5x^2$
$n = 12,\ \delta = 0{,}7\ldots$	$\psi_3(x) =$	$0{,}019421\,b^2 - 0{,}348196\,bx + 0{,}5x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}025913\,b^2 - 0{,}398804\,bx + 0{,}5x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}033255\,b^2 - 0{,}449300\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}041451\,b^2 - 0{,}499723\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}050500\,b^2 - 0{,}550091\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}060403\,b^2 - 0{,}600419\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}065676\,b^2 - 0{,}625573\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}071162\,b^2 - 0{,}650718\,bx + 0{,}5x^2$

Sixième travée.

$n = 11,\ \delta = 0{,}7\ldots$	$\psi_3(x) =$	$0{,}020419\,b^2 - 0{,}350\,bx + 0{,}5x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}026679\,b^2 - 0{,}400\,bx + 0{,}5x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}033775\,b^2 - 0{,}450\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}041709\,b^2 - 0{,}500\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}050480\,b^2 - 0{,}550\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}060089\,b^2 - 0{,}600\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}065207\,b^2 - 0{,}625\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}070535\,b^2 - 0{,}650\,bx + 0{,}5x^2$
$n = 12,\ \delta = 0{,}7\ldots$	$\psi_3(x) =$	$0{,}020439\,b^2 - 0{,}350136\,bx + 0{,}5x^2$
$0{,}8\ldots$		$0{,}026697\,b^2 - 0{,}400111\,bx + 0{,}5x^2$
$0{,}9\ldots$		$0{,}033794\,b^2 - 0{,}450099\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}0\ldots$		$0{,}041728\,b^2 - 0{,}500092\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}1\ldots$		$0{,}050502\,b^2 - 0{,}550093\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}2\ldots$		$0{,}060114\,b^2 - 0{,}600097\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}25\ldots$		$0{,}065234\,b^2 - 0{,}625101\,bx + 0{,}5x^2$
$1{,}3\ldots$		$0{,}070564\,b^2 - 0{,}650105\,bx + 0{,}5x^2$

FIN.

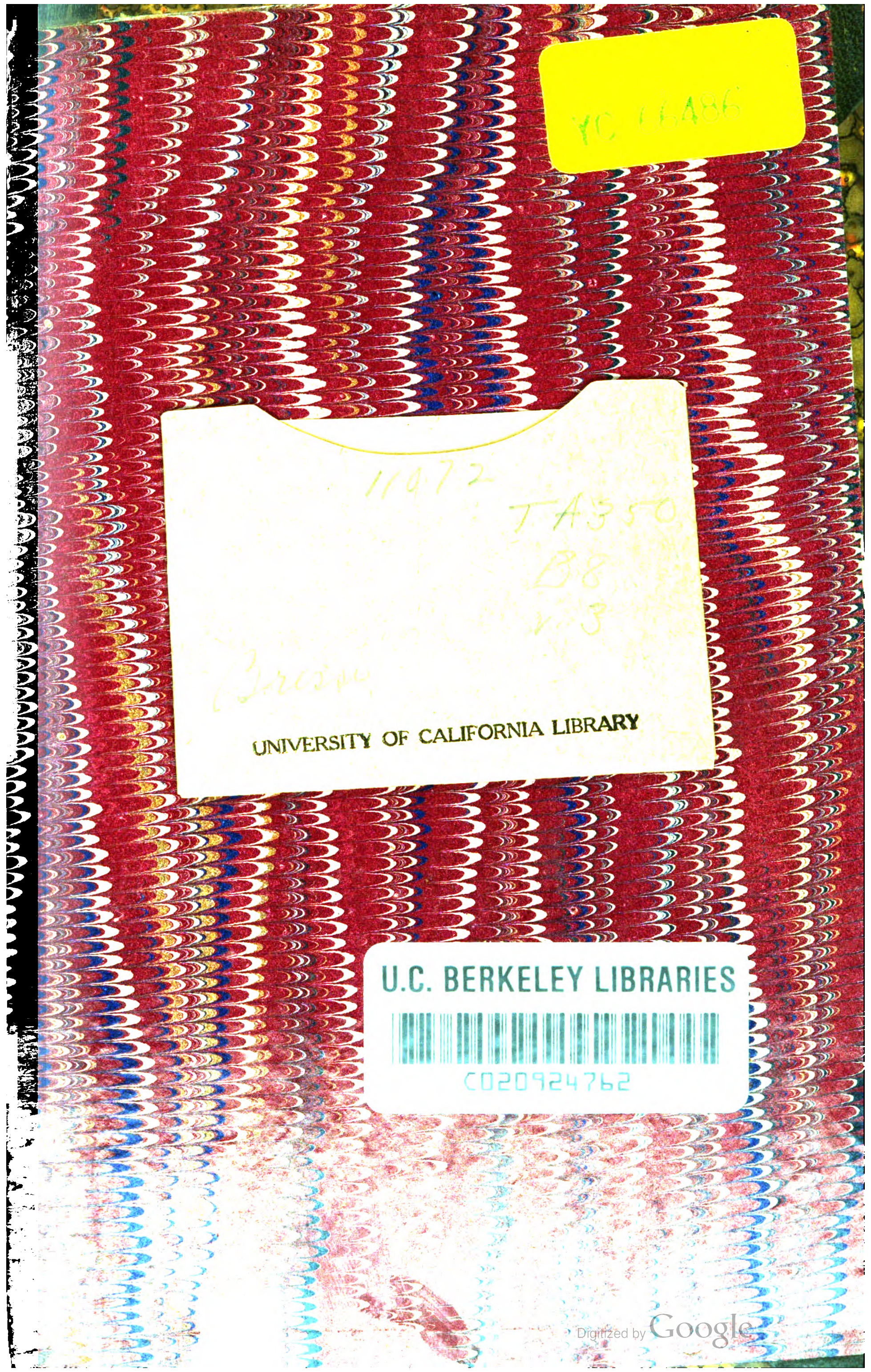
Pl. A.



ur la Fig. 10.

50 60 70 80 90 100 Millimètres.

Gravé par Dulos


YC 66486
11472
TA350
B8
v.3
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
U.C. BERKELEY LIBRARIES
C020924762
Digitized by Google

